Lineare algebraische Gruppen I

Vorlesung im Sommersemester 2020
Fakultät für Mathematik, Universität Leipzig
frei nach
T.A.Springer: Linear algebraic groups
Birkhäuser, Boston 1981
(zweite Auflage 1998)

Ort der Vorlesung: Seminargebäude, Raum 2-14
Zeit der Vorlesung: 13.15-14.45 Uhr Freitags

1 Etwas algebraische Geometrie

1.1 Die Zariski-Topologie

1.1.1 Nullstellen und Ideale

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei

$$V := k^n.$$

Die Elemente der Polynom-Algebra

$$S := k[T_1,...,T_n]$$

(abkürzend schreiben wir k[T]) können als Funktionen auf V mit Werten in k aufgefaßt werdern,

$$f: V \longrightarrow k.$$

Wir sagen $v \in V$ ist eine <u>Nullstelle</u> von f, wenn $f(v) = 0$ gilt, und wir sagen $v \in V$ ist eine <u>Nullstelle einer Menge</u>

$$M \subseteq k[T],$$

wenn gilt

$$f(v) = 0 \text{ für jedes } f \in M.$$

Die Menge aller Nullstellen einer Menge $M\subseteq k[T]$ wird mit

$$V(M)$$

bezeichnet. Ist $M = \{f_1,...,f_m\}$ endlich, so schreiben wir auch

$$V(f_1,...,f_m) := V(\{f_1,...,f_m\}).$$

Für jede Menge $X \subseteq V$ bezeichne

$$I(X) := \{f \in k[T] \mid f(v) = 0 \text{ für jedes } v \in X\}$$

die Menge der Polynome von k[T], welche in allen Punkten von X eine Nullstelle besitzen. Die Menge I(X) ist ein Ideal von k[T] und heißt <u>Ideal der Menge</u> X.

Für jedes Ideal I von k[T] ist die Menge

$$\sqrt{I} := \{f \in k[T] \mid \text{es gibt eine natürliche Zahl i mit } f^i \in I\}$$

ein Ideal von k[T] und heißt Radikal von I (genauer Nil-Radikal von I). Ein Ideal I mit I = $\sqrt{I}$ heißt radikales Ideal.

Bemerkungen

(i) Seien M $\subseteq$ k[T] eine Menge von Polynomen und

$$I = (M)\bullet k[T] := \{ p_1\bullet f_1+...+p_r\bullet f_r \mid p_i\in k[T],\ f_i\in I,\ r = 1,2,3, ...\}$$

das von M erzeugte Ideal. Dann gilt

$$V(M) = V(I).$$

Bei der Betrachtung einer Nullstellen-Menge V(M) können wir deshalb bei Bedarf stets annehmen, daß M ein Ideal ist.

(ii) Für jedes Ideal I $\subseteq$ k[T] gilt V(I) =[1] V($\sqrt{I}$).

(iii) Für jede Teilmenge X $\subseteq$ k^n gilt I(X) =[2] $\sqrt{I(X)}$

(iv) Die grundlegenden Sätze im Kontext von Polynom-Idealen sind der Basis-Satz und der Nullstellensatz von Hilbert. Das Basis-Satz sagt aus, jedes Ideal von k[T] besitzt ein endliches Erzeugendensystem, d.h. der Ring k[T] ist noethersch. Der Grundkörper k muß dabei nicht algebraisch abgeschlossen sein.

(v) Wir werden den Hilbertschen Nullstellensatz in zwei verschiedenen äquivalenten Formulierungen benötiten.

Beweise für den Hilbertschen Basis-Satz und den Hilbertschen Nullstellensatz findet man in jedem der folgenden Bücher.

Waerden, B.L. van der: Algebra I+II, Springer, Berlin 1936 (9. Auflage 1993).
Jacobson, N.: Algebra I+II, Dover Publications, Mineola, N.Y., 1989.
Lang, S.: Algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965.
Matsumura, H.: Commutative ring theory[3], Cambridge University Press, 1986.
Zariski, O., Samuel, P.: Commutative algebra I+II, Springer, New York 1958.

Frühe Auflagen des Buchs von van der Waerden heißen “Moderne Algebra”. Die Auflagen weichen wenig voneinander ab. Wenn in einem Algebra-Lehrbuch ein Satz nicht bewiesen wird, so findet man meistens einen Beweis bei van der Waerden. Das Buch ist nicht so streng in ein Satz-Beweis-Bemerkung-Schema gegliedert wie moderne Lehrbücher, sondern hat einen erzählenden Grundton. Zitate sind deshalb schwieriger. Andernfalls wäre es wahrscheinlich noch heute das Standard-Werk zur Algebra (zusammen mit dem Buch von Jacobson).

1.1.2 Hilbertscher Nullstellensatz

(i) Für jedes Ideal I $\subseteq$ k[T] sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent.

a) I ist ein echtes Ideal von k[T], d.h. I $\neq$ k[T].

---

[1] Wegen I $\subseteq$ $\sqrt{I}$ gilt V(I) $\supseteq$ V($\sqrt{I}$). Sei p $\in$ V(I) und f $\in$ $\sqrt{I}$. Dann liegt eine Potenz von f in I, sagen wir f^i $\in$I, und es gilt $f(p)^i = 0$, also f(p) = 0. Da dies für jedes f $\in$ $\sqrt{I}$ der Fall ist, folgt p $\in$ V($\sqrt{I}$). Wir haben gezeigt, es gilt auch V(I) $\subseteq$ V($\sqrt{I}$).

[2] Trivialerweise gilt I(X) $\subseteq$ $\sqrt{I(X)}$. Sei f $\in$ $\sqrt{I(X)}$. Dann liegt eine Potenz von f in I(X), sagen wir f^i $\in$I(X). Das bedeutet aber $f(p)^i = 0$ für jedes p $\in$ X. Dann gilt aber auch f(p) = 0 für jedes p $\in$ X, d.h. f$\in$I(X). Wir haben gezeigt, es gilt auch $\sqrt{I(X)}$ $\subseteq$ I(X).

[3] Theorem 3.3 bzw. Theorem 5.4.

b) $V(I) \neq \emptyset$.

(ii) Für jedes Ideal $I \subseteq k[T]$ gilt $I(V(I)) = \sqrt{I}$.

Mit anderen Worten: ist $f \in k[T]$ in allen Punkten von $V(I)$ gleich Null, so liegt eine Potenz von f in I (die Umkehrung gilt trivialerweise).

Beweis der Äquivalenz der beiden Aussagen. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $f \in k[T]$ in allen Punkten von $V(I)$ gleich Null. Wir führen eine zusätzliche Unbestimmte T_{n+1} ein, verwenden die Bezeichnung

$$T' \text{ für } T_1,...,T_{n+1}$$

und betrachten die Elemente von I als Polynome von $k[T']$. Das Polynom

$$F(T') := f(T)\bullet T_{n+1} - 1$$

ist in allen Punkten von k^{n+1} gleich Eins, in welchen die Polynome von I gleich Null sind. Die Nullstellenmenge des Ideals

$$I' := I\bullet k[T'] + F\bullet k[T']$$

von $k[T']$ ist deshalb leer. Nach (i) ist

$$I' = k[T'].$$

Insbesondere liegt das Einselement in I', d.h. es gilt

$$1 = \sum_i p_i(T')\bullet f_i(T) + p(T')\bullet F(T')$$

für geeignete gewählte Polynome p_i, $p \in k[T']$ und $f_i \in I$. Wir setzen $T_{n+1} = \frac{1}{f}$, d.h. wir wenden den k-Algebra-Homomorphismus

$$k[T'] \longrightarrow k(T),\ u(T_1,...,T_{n+1}) \mapsto p(T_1,...,T_n, 1/f),$$

an und erhalten

$$1 = \sum_i p_i(T, 1/f)\bullet f_i(T).$$

Dies ist eine Relation im Quotientenkörper $k(T)$ von $k[T]$. Durch Multiplikation mit einer hinreichend hohen Potenz von f, sagen wir mit f^s, erhalten wir eine Relation in $k[T]$:

$$f^s = \sum_i (p_i(T, 1/f)\bullet f^s)\bullet f_i(T)$$

Genauer wir wählen s so groß, daß das Produkt $p_i(T, 1/f)\bullet f^s$ in $k[T]$ lieft für jedes i. Weil die f_i in I liegen, folgt $f^s \in I$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). a) $\Rightarrow$ b). Angenommen, b) ist falsch. Dann gilt $V(I) = \emptyset$. Die konstante Funktion $1 \in k[T]$ ist dann in allen Punkten von $V(I)$ gleich Null. Nach (ii) liegt eine Potenz von 1 in I. Es folgt $1 \in I$ und damit $I = k[T]$, d.h. a) ist falsch.

b) $\Rightarrow$ a). Angenommen a) ist falsch. Dann gilt $I = k[T]$, also $1 \in I$, also $V(I) = \emptyset$, d.h. b) ist falsch.

QED.

1.1.3 Die Zariski-Topologie auf $V = k^n$

Die Abbildung

$$\{\text{Ideale von } k[T]\} \longrightarrow \{\text{Teilmengen von } V\},\ I \mapsto V(I),$$

hat die folgenden Eigenschaften.

(a) $V(\{0\}) = k^n$, $V(k[T]) = \emptyset$.

(b) $I \subseteq J \Rightarrow V(I) \supseteq V(J)$.

(c) $V(I \cap J) = V(I\cdot J) = V(I) \cup V(J)$.

(d) Für jede Familie $\{I_\alpha\}_{a\in A}$ von Idealen von $k[T]$ gilt

$$V(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} V(I_\alpha).$$

Beweis. Zu (a). Das einzige Element des Null-Ideals $\{0\}$ ist gleich Null in allen Punkten von k^n, d.h. es besteht die erste Identität. Wegen $1 \in k[T]$ und weil 1 als Funktion von k^n in keinem Punkt gleich Null ist, besteht auch die zweite Identität.

Zu (b). Sei $p \in V(J)$ und $f \in I$. Dann gilt auch $f \in J$, also $f(p) = 0$. Da dies für jedes $f \in I$ gilt, liegt p in $V(I)$. Wir haben gezeigt, $V(J) \subseteq V(I)$.

Zu (c). Wegen $I \supseteq I\cap J$, $J \supseteq I\cap J$ und $I\cap J \supseteq I\cdot J$ gilt nach (b)

$$V(I)\cup V(J) \subseteq V(I\cap J) \subseteq V(I\cdot J).$$

Sei jetzt $p \in V(I\cdot J)$. Es reicht zu zeigen, $p \in V(I)\cup V(J)$. Falls $p \in V(I)$ gilt, ist dies der Fall. Sei also

$$p \notin V(I).$$

Dann gibt es ein $f\in I$ mit

$$f(p) \neq 0.$$

Für jedes $g \in J$ gilt $f\cdot g \in I\cdot J$, also $0 = (f\cdot g)(p) = f(p)\cdot g(p)$. Wegen $f(p) \neq 0$, folgt $g(p) = 0$. Wir haben gezeigt $g(p) = 0$ für jedes $g \in J$, d.h. es ist $p \in V(J)$. Damit liegt p auch in diesem Fall in $V(I)\cup V(J)$.

Zu (d). Wegen (b) und $I_\beta \subseteq I:= \sum_{\alpha\in A} I_\alpha$ gilt $V(I) \subseteq V(I_\beta)$ für jedes β, also

$$V(I) \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} V(I_\alpha).$$

Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei $p \in V(I_\alpha)$ für jedes α.Wir haben zu zeigen, $p \in V(I)$, d.h.

$$f(p) = 0 \text{ für jedes } f \in I = \sum_{\alpha\in A} I_\alpha.$$

Für $f \in I$ hat f die Gestalt

$$f = f_{\alpha_1} + ... + f_{\alpha_r} \text{ mit } f_{\alpha_i} \in I_{\alpha_i} \text{ für jedes } i.$$

Nach Voraussetzung liegt p in jedem $V(I_\alpha)$. Insbesondere gilt $f_{\alpha_i}(p) = 0$ für jedes i, also $f(p) = 0$.

QED.

Bemerkung
Aus (a), (c) und (d) folgt, daß Mengen der Gestalt V(I) die abgeschlossenen Mengen einer Topologie von V sind. Diesse Topologie heißt Zariski-Topologie von V. Die auf einer Teilmenge $X \subseteq V$ induzierte Topologie heißt Zariski-Topologie von X. Die abgeschlossenen Mengen von V heißen algebraische Mengen.

1.1.4 Aufgaben

(1)[4] Die algebraischen Mengen von V = k sind neben k und der leeren Menge gerade die endlichen Teilmengen von k.

(2)[5] Die Abschließung von $X \subseteq V$ in der Zariski-Topologie ist gleich V(I(X)).

(3)[6] Die Abbildung

$\{$Zariski-abgeschlossene Teilmengen von $k^n\} \longrightarrow \{$ radikale Ideale von $k[T]\}$

---

[4] Jedes von 0 verschiedene Polynom hat höchstens endlich viele Nullstellen.

[5] Die Abschließung $\overline{X}$ von X ist definiert als Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, welche die Mange X enthalten. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \bigcap \{V(M) \mid M \subseteq k[T] \text{ und } X \subseteq V(M)\}\\ &= \bigcap \{V(M) \mid M \subseteq k[T] \text{ und jedes } f\in M \text{ ist 0 in allen } p \in X\}\\ &= \bigcap \{V(M) \mid M \subseteq k[T] \text{ und jedes } f\in M \text{ liegt in } I(X)\}\\ &= \bigcap \{V(M) \mid M \subseteq I(X)\}\end{aligned}$$

Die Menge der $M \subseteq I(X)$ hat ein maximales Element, nämlich M = I(X). Für alle anderen M gilt $V(I(X)) \subseteq V(M)$. Man kann sie also bei der Durchschnittsbildung weglassen. Damit gilt

$$\overline{X} = V(I(X)).$$

[6] Es gilt (1). Seien I und J zwei Ideale von k[X] mit $V(I) \subseteq V(J)$. Für $f \in J$ ist dann f identisch Null auf V(J), also erst recht auf V(I). Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz liegt eine Potenz von f in I. Wir haben gezeigt $J \subseteq \sqrt{I}$. Dann gilt aber auch $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.

Seien jetzt I und J zwei Ideale von von k[X] mit $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$. Für

$$x \in V(I)$$

gilt nach Bemerkung 1.1.1 (ii) auch

$$\begin{aligned}x &\in V(\sqrt{I})\\ &\subseteq V(\sqrt{J}) && (\text{wegen } \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I})\\ &= V(J) && (\text{nach Bemerkung 1.1.1 (ii)}).\end{aligned}$$

Damit ist (1) bewiesen.

Die Abbildung ist surjektiv. Sei I ein radikales Ideal von k[T]. Weil X = V(I) abgeschlossen ist, gilt nach (2)

$$V(I) = V(I(X)).$$

Auf Grund der Äquivalentz (1) folgt

$$\sqrt{I} = \sqrt{I(X)}$$

Nun ist I(X) ein radikales Ideal (nach Bemerkung 1.1.1 (iii)) und dasselbe gilt für I (nach Voraussetzung). Also gilt

$$I = I(X).$$

Die Abbildung ist injektiv. Seien X und Y zwei Zariski-abgeschlossene Mengen mit I(X) = I(Y). Dann gilt

$$V(I(X)) = V(I(Y)).$$

Nach Aufgabe (2) sind die Abschließungen von X und Y gleich. Weil X und Y abgeschlossen sein sollen, folgt X = Y.

$$X \mapsto I(X)$$

ist bijektiv. Für je zwei Ideale I und J von k[T] gilt

$$V(I) \subseteq V(J) \Leftrightarrow \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I} \qquad (1)$$

(4)[7] Die Euklidische Topologie des $\mathbb{C}^n$ ist 'feiner' als die Zariski-Topologie (hat mehr abgeschlossene Mengen).

---

[7] Jede Zariski-abgeschlossene Menge V(I) ist als Nullstellenmenge von Polynomen abgeschlossen in der gewöhnlichen Topologie.

Umgekehrt gibt es abgeschlossene Mengen der gewöhnlichen Topologie, die nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie sind. Zum Beweis wählen wir eine Mengen M mit:

M echt enthalten in $\mathbb{C}$, abgeschlossen in der gewöhnlichen Topologie und unendlich, zum Beispiel

$$M := [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Jede Polynom, welches 0 ist in allen Punkten von M, ist identisch Null, d.h.

$$\overline{M} = \mathbb{C} \neq M.$$

Insbesondere ist M nicht abgegeschlossen in der Zariski-Topologie. Die Behauptung gilt also für n = 1.

Sei

$$p: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

die Projektion auf die erste Koordinate. Dann ist $p^{-1}(M)$ abgeschlossen in der gewöhnlichen Topologie (weil p stetig ist). Es reicht zu zeigen,

$$\overline{p^{-1}(M)} = \mathbb{C}^n.$$

Sei $f(T) = \sum_i a_i(T_2,...,T_n)\cdot T_1^i$ identisch Null auf $p^{-1}(M)$. Es reicht zu zeigen, daß f überall identisch Null ist (denn dann gilt $I(p^{-1}(M)) = \{0\}$, also $\overline{p^{-1}(M)} = V(I(p^{-1}(M))) = \mathbb{C}^n$). Für festgewählte $x_2, ... , x_n \in \mathbb{C}$ und $x \in M$ beliebig gilt

$$0 = f(x, x_2, ... , x_n) = \sum_i a_i(x_2,...,x_n)\cdot x^i.$$

Weil M unendlich ist, folgt ist $f(T_1,x_2, ... , x_n)$ identisch Null, d.h. es gilt

$$a_i(x_2,...,x_n) = 0$$

für jedes i. Da dies für beliebige $x_2, ... , x_n \in \mathbb{C}$ gilt, sind die a_i identisch Null. Damit ist aber auch f identisch Null.

<u>Alternativer Beweis</u> für die Existenz von Mengen im $\mathbb{C}^n$, die abgeschlossen sind in der gewöhnlichen Topologie, nicht jedoch Zariski-abgeschlossen. Wie oben zeigt man Fall n=1, das Einheitsintervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen in der gewöhnlichen Topologie, nicht jedoch Zariski-abgschlossen. Für allgemeines n kann man die Tatsache nutzen, daß die Einschränkung einer algebraischen Menge des $\mathbb{C}^n$ auf eine Koordinatenachse wieder Zariki-abgschlossen ist (weil die Einschränkung eines Polynoms auf eine Achse wieder ein Polynom ist). Deshalb ist zum Beispiel

$$[0,1] \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} = x_1\text{-Achse des } \mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^n$$

nicht Zariski-abgeschlossen im $\mathbb{C}^n$.

1.1.5 Eigenschaften algebraischer Mengen

Die algebraische Teilmenge $X \subseteq V = k^n$ sei mit der Zariski-Topologie versehen. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die Topologie von X ist eine T_1-Topologie[8], d.h. Punkte sind abgeschlossen.
(ii) Jede Familie von abgeschlossenen Mengen von X enthält ein minimales Element.
(iii) Jede absteigende Folge von abgeschlossenen Mengen von X ist stationär.
(iv) Jede offene Überdeckung von X enthält eine endliche Teilfamilie, die ebenfalls überdeckt.

Beweis. Zu (i). Seien $p, q \in X$ zwei verschiedene Punkte. Dann gibt es ein i, für welches die i-ten Koordinaten p_i und q_i verschieden sind. Der Punkt p_i liegt dann in der abgeschlossenen Menge

$$V(T_i - p_i),$$

der Punkt q_i jedoch nicht. Die offene Menge

$$V - V(T_i - p_i)$$

ist deshalb eine offene Umgebung von q_i, welche p_i nicht enthält.

Zu (iii). Auf Grund der Aussage 1.1.4 (3) ist die Behauptung äquivalent zu der folgenden Aussage:

jede aufsteigende Folge von radikalen Idealen von k[T] ist stationär.

Diese Aussage gilt aber - weil k[T] noethersch ist - sogar für beliebige aufsteigende Folgen von Idealen von k[T].

Zu (ii). Auf Grund der Aussage 1.1.4 (3) ist die Behauptung äquivalent zu der folgenden Aussage:

jede Familie von radikalen Idealen von k[T] enthält ein maximales Element.

Das ist aber der Fall auf Grund der bereits bewiesenen Aussage (iii).
Zu (iv). Diese Aussage ist äquivalent zur folgenden:

(*) jede Familie von abgeschlossenen Mengen mit leeren Durchschnitt besitzt bereits eine endliche Teilfamilie mit leerem Durchschnitt.

Betrachten wir die zugehörige Familie der endlichen Durchschnitte der Familie von (*). Diese besitzt nach (ii) ein minimales Element. Dieses hat die Eigenschaft, daß es in allen Elementen der Familie (*) enhalten sein muß (sonst wäre es nicht minimal). Deshalb muß es aber gleich der leeren Menge sein.
QED.
Bemerkungen
(i) Ein topologischer Raum mit der Eigenschaft (ii) heißt noethersch.
(ii) Aus unserer Argumentation geht hervor, daß die obigen Aussagen (ii) und (iii) äquivalent sind.
(iii) Ein topologischer Raum, für welchen Aussage (iv) gilt heißt quasi-kompakt.

1.1.6 Aufgabe

Eine abgeschlossene Teilmenge eines quasi-kompakten topologischen Raums ist quasi-kompakt.[9]

---

[8] Für je zwei Punkten von V hat jeder eine Umgebung, die den anderen nicht enthält.
[9] Sei X quasi-kompakt und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Weiter sei

1.2 Irreduzibilität topologischer Räume

1.2.1 Definition

Sei X ein nicht-leerer topologischer Raum. Dann heißt X reduzibel, wenn X Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen ist,

$$X = Y \bigcup Z \text{ mit } Y, Z \text{ abgeschlossen und echt enthalten in } X.$$

Andernfalls heißt X irreduzibel. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt irreduzibel, wenn sie es bezüglich der induzierten Topologie ist.

Beispiel

Die Vereinigung von zwei verschiedenen Kreisen ist reduzibel, sagen wir

$$V(x^2+y^2 - 3) \bigcup V((x-1)^2+(y+1)^2 - 1).$$

Wir werden bald zeigen können, daß jeder der beiden Kreise irreduzibel ist (weil die Kreisgleichung ein irreduzibles Polynom ist).

Bemerkung

Ein nicht-leerer topologischer Raum X ist genau dann irreduzibel, wenn je zwei nicht-leere offenen Teilmengen einen nicht-leeren Durchschnitt besitzen, d.h. wenn jede nicht-leere offene Teilmenge dicht liegt in X.

Beweis. Sei X irreduzibel, und seien U und V zwei nicht-leere offene Teilmengen. Dann sind X-U und Y-V zwei echte abgeschlossene Teilmengen von X. Weil X irreduzibel ist, kann X nicht Vereinigung von X-U und Y-V sein, d.h. es gibt einen Punkt

$$p \in X \text{ mit } p \notin X\text{-}U \text{ und } p \notin X\text{-}V.$$

Deshalb gilt $p \in U \bigcap V$, d.h. U und V haben einen nicht-leeren Durchschnitt.

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, je zwei nicht-leere offene Teilmengen haben einen nicht-leeren Durchschnitt. Angenommen X ist reduzibel, sagen wir

$$X = Y \bigcup Z$$

mit echten abgeschlossenen Teilmengen Y und Z von X. Dann sind

$$U := X - Y \text{ und } V = X - Z$$

nicht-leere offene Teilmengen von X. Nach Voraussetzung haben sie einen nicht-leeren Durchschnitt, d.h. es gibt einen Punkt p mit

$$p \in X - Y \text{ und } p \in X - Z.$$

Dann liegt p weder in Y noch in Z, d.h. es gilt

$$p \in X - (Y \bigcup Z).$$

$$Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \text{ mit } U_\alpha \text{ offen in X für jedes } \alpha.$$

Dann bilden die U_α zusammen mit X-Y eine offene Überdeckung von X. Weil X quasi-kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, sagen wir

$$U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_s} \text{ überdecken zusammen mit X-Y die Menge X.}$$

Dann überdecken $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_s}$ die Menge Y.

Das steht im Widerspruch zur Annahme $X = Y \bigcup Z$. Dieser Widerspruch zeigt, X ist irreduzibel.
QED.

1.2.2 Aufgabe

Ein nicht-leerer irreduzibler Hausdorff-Raum besteht aus genau einen Punkt.
Beweis. Angenommen, es gibt einen irreduziblen Hausdorff-Raum X mit mindestens zwei verschiedenen Punkten

$$p, q \in X \text{ mit } p \neq q.$$

Weil X ein Hausdorff-Raum ist, gibt es disjunkte offene Mengen

$$U, V \subseteq X \text{ disjunkt mit } p \in U \text{ und } q \in V.$$

Damit sind

$$Y := X - U \text{ und } Z := X - V$$

echte abgeschlossene Teilmengen von X. Es gilt

$$Y \bigcup Z = (X-U)\bigcup(X-V) = X - (U\bigcap V).$$

Weil U und V disjunkt sein sollen, folgt

$$X = Y \bigcup Z,$$

ein Widerspruch. Ein irreduzibler Hausdorff-Raum kann also keine zwei Punkte enthalten.
QED.

1.2.3 Eigenschaften irreduzibler Mengen

Seien X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Folgende Aussagen sind äquivalent.
   (a) A ist irreduzibel.
   (b) Die Abschließung $\overline{A}$ ist irreduzibel.

(ii) Ist $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung (topologischer Räume), so ist mit A auch f(A) irreduzibel.

Beweis. <u>Zu</u> (i) (a) $\Rightarrow$ (b). Angenommen, $\overline{A}$ ist reduzibel, sagen wir

$$\overline{A} = A' \bigcup A''$$

mit zwei echten abgeschlossenen Teilmengen A' und A'' von $\overline{A}$. Wir bilden den Durchschnitt mit A und erhalten

$$A = (A'\bigcap A) \bigcup (A''\bigcap A)$$

Die beiden Teilmengen $A'\bigcap A$ und $A''\bigcap A$ sind abgeschlossen in A. Weil A irreduzibel ist, muß eine von beiden gleich A sein, sagen wir

$$A = A'\bigcap A.$$

Dann gilt aber $A \subseteq A'$, und weil A' abgeschlossen ist in $\overline{A}$, gilt auch $\overline{A} \subseteq A'$ - im Widerpruch zur Annahme, daß A' echt enthalten sein soll in $\overline{A}$.

<u>Zu</u> (i) (b) $\Rightarrow$ (a). Angenommen, A ist reduzibel, sagen wir

$$A = A' \bigcup A''$$

mit echten Teilmengen A' und A'' von A, welche in A abgeschlossen sind. Dann gibt es abgeschlossene Teilmengen B' und B'' von X mit

$$A' = A\bigcap B' \text{ und } A'' = A\bigcap B''.$$

Wegen

$$A = A' \bigcup A'' \subseteq B' \bigcup B''$$

und weil B' und B" abgeschlossen in X sind, folgt

$$\overline{A} \subseteq B' \cup B'',$$

also

$$\overline{A} = (B' \cap \overline{A}) \cup (B'' \cap \overline{A}).$$

Weil $\overline{A}$ irreduzibel ist, können nicht beide Mengen auf der rechten Seite echte Teilmengen von $\overline{A}$ sein, sagen wir,

$$\overline{A} = B' \cap \overline{A},$$

also $\overline{A} \subseteq B'$, also $A \subseteq B'$, also $A = A \cap B' = A'$ im Widerspruch zur Wahl von A'. Also in A irreduzibel.

<u>Zu</u> (ii). Angenommen, f(A) ist reduzibel, sagen wir

$$f(A) = B' \cup B''$$

mit echten abgeschlossenen Teilmengen B' und B" von f(A). Dann gilt aber

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(B') \cup f^{-1}(B').$$

Weil f stetig ist, sind die vollständigen Urbilder auf der rechten Seite abgeschlossene Mengen. Wegen

$$A = (f^{-1}(B') \cap A) \cup (f^{-1}(B') \cap A)$$

und A irreduzibel, können nicht beide Mengen rechts echte Teilmengen von A sein, sagen wir

$$A = f^{-1}(B') \cap A.$$

Es folgt $A \subseteq f^{-1}(B')$, also $f(A) \subseteq B'$ im Widerspruch zur Wahl von B'. Also muß f(A) irreduzibel sein.
QED.

1.2.4 Zerlegung in irreduzible Komponenten

Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Dann gibt es in X nur endlich viele maximale irreduzible Teilmengen, sagen wir

$$X_1, \ldots, X_s .$$

Diese sind abgeschlossen und überdecken X,

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_s .$$

Läßt man ein X_i auf der rechten Seite weg, so hört das Gleichheitszeichen auf zu gelten (falls X_i nicht mehrfach vorkommt). Insbesondere gilt

(i) Jede irreduzible Teilmenge Y von X liegt ganz in einem X_i.

(ii) Für jede Darstellung

$$X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_t$$

von X als Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen Y_i kommen unter den Y_i alle X_i vor (und die übrigen kann man weglassen.

Beweis.Nach 1.2.3 (a) sind die maximalen irreduziblen Teilmengen von X abgeschlossen.

<u>1. Schritt</u>. X ist Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen.

Wir betrachten die Menge

$$M := \left\{ Y \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Y ist abgeschlossen in X, aber nicht} \\ \text{Vereinigung von endlich vielen} \\ \text{abgeschlossenen irreduzibelen Teilmengen} \end{array} \right\}$$

Es reicht zu zeigen, X liegt nicht in dieser Menge. Dazu reicht es zu zeigen, diese Menge ist leer. Angenommen sie ist es nicht. Nach 1.1.5 (ii) enthält sie dann ein minimalen Element, sagen wir A. Die Menge A ist, weil sie in M liegt, reduzibel, d.h. sie ist Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen, sagen wir

$$A = A' \bigcup A''.$$

Wegen der Minimalitätseigenschaft von A liegen A' und A" nicht in M. Sie sind deshalb beide Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen. Dann gilt dasselbe aber auch für deren Vereinigung, d.h. A liegt nicht in M. Dies steht im Widerspruch zu Wahl von A. Die Menge M muß also leer sein.

<u>2. Schritt</u>. Sei $X = Y_1 \bigcup ... \bigcup Y_t$ mit Y_i irreduzibel und abgeschlossen. Dann liegt jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge Y von X ganz in einem der Y_i .

Wir können annehmen, daß kein Y_i ganz in einem anderen Y_i liegt. Wir bilden den Durchschnitt mit Y und erhalten

$$Y = (Y_1 \bigcap Y) \bigcup ... \bigcup (Y_s \bigcap Y).$$

Weil Y irreduzibel ist, gibt es ein i mit

$$Y = Y_i \bigcap Y,$$

also $Y \subseteq Y_i$.

3. <u>Schritt.</u> Abschluß des Beweises.

Nach dem ersten Schritt gibt es eine Zerlegung

$$X = X_1 \bigcup ... \bigcup X_s$$

mit X_i irreduzibel und abgeschlossen für jedes i. Nach dem zweiten Schritt liegt jede maximale irreduzible Teilmenge von X ganz in einem X_i und ist damit gleich einem X_i. Die Anzahl der maximalen irreduziblen Teilmengen von X ist damit endlich, und jede dieser maximalen irreduziblen Teilmengen kommt als ein X_i in der obigen Vereinigung vor. Jedes X_i, welches nicht maximal ist, liegt in einer größeren irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge Y von X, welche ihrerseit nach dem zweiten Schritt in einem X_j liegt,

$$X_i \not\subseteq Y \subseteq X_j.$$

Es ist dann $i \neq j$, d.h. X_i kann weggelassen werden. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen - einschließlich Aussage (i). Aussage (ii) ist nun eine Folge des zweiten Schritts.

QED.

Definition

Die maximalen irreduziblen Teilmengen eines noetherschen topologischen Raums X werden (irreduzible) <u>Komponenten</u> von X genannt.

1.2.5 Kriterium für Irreduzibilität

Eine abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq V := k^n$ (bezüglich der Zariski-Topologie) ist genau dann irreduzibel, wenn I(X) ein Primideal ist.

Beweis. Sei X irreduzibel und seien $f,g \in k[T]$ Polynome mit $fg \in I(X)$. Dann gilt

$$X = (X \bigcap V(f)) \bigcup (X \bigcap V(g)).$$

Weil X irreduzibel ist, kann rechts nicht die Vereinigung echter Teilmengen stehen. Bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen gilt, sagen wir

$$X = X \bigcap V(f),$$

also

$$X \subseteq V(f),$$

also f(p) = 0 für jedes p $\in$ X, also f $\in$ I(X). Wir haben gezeigt, I(X) ist ein Primideal.

Sei jetzt umgekehrt I(X) ein Primideal. Wir haben zu zeigen, X ist irreduzibel. Seien I' und I" Idealen von k[T] mit

$$X = V(I') \bigcup V(I'') = V(I' \bigcap I'')$$

Es reicht zu zeigen, nicht beide Teilmengen V(I') und V(I") sind echte Teilmengen von X. Angenommen V(I') ist echt. Dann gibt es einen Punkt

$$p \in X - V(I') = V(I) - V(I').$$

Alle Polynome von I(X) sind gleich Null in p, nicht jedoch alle Polynome von I'. Es gibt also ein Polynom

$$f \in I' - I(X).$$

Für jedes g $\in$ I" gilt fg $\in I' \cdot I'' \subseteq I' \bigcap I''$, d.h. fg ist Null in allen Punkten von X, d.h. fg $\in$ I(X). Weil I(X) ein Primideal ist und f nach Konstruktion nicht in I(X) liegt, folgt g $\in$ I(X). Wir haben gezeigt,

$$I'' \subseteq I(X).$$

Damit gilt aber

$$X = V(I(X)) \subseteq V(I'').$$

Nach Wahl von I" ist V(I") eine Teilmenge, die ganz in X liegt, d.h. es gilt

$$X = V(I'').$$

Wir haben gezeigt, daß X irreduzibel sein muß.
QED.
Beispiel
Sei

$$X = V(f) \subseteq k^2 \text{ mit } f = (x-a)^2+(y-b)^2 - r^2,\ a, b, r \in k \text{ und } r \neq 0.$$

Außerdem sei die Charakteristik von k ungleich 2,

$$\mathrm{Char}(k) \neq 2.$$

Dann ist X irreduzibel.
Beweis. Es reicht zu zeigen, daß f irreduzibel in in k[x,y], denn dann ist

$$I := f \cdot k[x,y]$$

ein Primideal und damit insbesondere ein radikales Ideal, so daß gilt

$$I(X) = I(V(I)) = \sqrt{I} = I.$$

Durch einen linearen Isomorphismus erreichen wir, daß a = b = 0 gilt. O.B.d.A. können wir also annehmen,

$$f = x^2 + y^2 - r^2.$$

Wir betrachten f als Polynom in y über dem Polynomring k[x],

$$f = y^2 + (x-r)\cdot(x+r).$$

Die Faktoren x-r und x+r des Absolutgliedes sind Primelemente von k[x][10], und sie sind nicht assoziiert: aus

$$x - r = g(x)\cdot(x+r) \text{ in } k[x]$$

[10] Sie sind aus Grad-Gründen irreduzibel im ZPE-Ring k[x].

würde folgen, daß g(x) vom Grad 0 ist. Durch Vergleich der höchsten Koeffizienten folgt

$$g = 1,$$

d.h.

$$x - r = x + r.$$

Insbesondere ist $2\bullet r$ gleich Null. Weil die Charakteristik von k ungleich 2 ist, folgt $r = 0$ im Widerspruch zur Wahl von r.

Damit ist das Absolutglied x^2-r^2 von f Produkt von zwei nicht-assoziierten Primelementen, insbesondere also nicht teilbar durch deren Quadrat. Da die anderen Koeffizienten von f mit Ausnahme des höchsten durch diese Primelemente teilbar sind, muß f irreduzibel sein.
QED.

1.2.6 Aufgabe

Jedes radikale Ideal I von k[T] ist Durchschnitt von endlich vielen Primidealen, sagen wir

$$I = P_1 \cap \ldots \cap P_s.$$

Falls es keine Inklusionen zwischen den P_i gibt, sind sie bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.[11]

---

[11] Sei $X = V(I)$ und $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann gilt

$$\begin{aligned} V(I) &= X \\ &= X_1 \cup \ldots \cup X_r \\ &= V(I(X_1)) \cup \ldots \cup V(I(X_r)) \\ &= V(I(X_1) \cap \ldots \cap I(X_r)) \end{aligned}$$

also

$$\sqrt{I} = \sqrt{I(X_1) \cap \ldots \cap I(X_R)}$$

Weil I nach Voraussetzung radikal sein soll, folgt

$$I = \sqrt{I(X_1) \cap \ldots \cap I(X_R)}$$

Weil die $I(X_i)$ radikal sind, ist es auch ihr Durchschnitt, d.h.

$$I = I(X_1) \cap \ldots \cap I(X_r)$$

Weil die X_i irreduzibel sind, sind die $I(X_i)$ Primideale.

Wir haben noch die Eindeutigkeitsaussage zu den auftretenden Primidealen zu beweisen. Sei

$$I = p_1 \cap \ldots \cap p_s$$

Durchschnitt von Primidealen p_i, zwischen denen keine Inklusionen bestehen. Dann gilt

$$V(I) = \bigcup_{i=1}^{s} V(p_i).$$

Jede Komponente X_i liegt nach 1.2.4 ganz in einem $V(p_j)$ auf der rechten Seite vor. Weil keine Inklusionen zwischen den p_i bestehen sollen, gilt dasselbe für die $V(p_i)$. Deshalb kommen außer den Komponenten von V(I) auf der rechten Seite keine weiteren Mengen vor, d.h.

$$\{V(p_i) \mid i = 1, \ldots, s\} = \{X_i \mid i = 1,\ldots,r\}.$$

Deshalb gilt $r = s$ und bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen

1.2.7 Zusammenhang

Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn er nicht als Vereinigung von zwei disjunkten und abgeschlossenen echten Teilmengen geschrieben werden kann. Damit ist jeder irreduzible Raum zusammenhängend.

Argumentationen, die nachweisen sollen, daß ein Raum X zusammenhängend ist, laufen meistens auf den Beweis der folgenden Implikation hinaus:

$$X = A \bigcup B \text{ mit } A \text{ und } B \text{ disjunkt und abgeschlossen in } X \Rightarrow X = A \text{ oder } X = B.$$

Die nachfolgenden Aufgaben beschreiben einige Eigenschaften des Zusammenhangs und dessen Beziehung zum Begriff der Irreduzibilität. Zunächst aber erst einige Bemerkungen zum Zusammenhang im Kontext beliebiger topologischer Räume (vgl. Kelley, J.L.: General topology, Van Nostsrand, Princeton, New Jersey, 1957).

Zwei Teilmengen A, B eines topologischen Raums X heißen getrennt, wenn keine der beiden einen Berührungspunkt der anderen enthält, d.h. wenn gilt

$$A \bigcap \overline{B} = \emptyset = B \bigcap \overline{A}.$$

Sind die Mengen abgeschlossen in X, so bedeutet dies einfach, daß sie disjunkt sind. Eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raums X, welche in keiner echt größeren zusammenhängenden Teilmenge von X enthalten ist, heißt Zusammenhangskomponente von X.

Zusammenhang und wegeweiser Zusammenhang

Ein topologischer Raum X heißt wegeweise zusammenhängend, wenn sich je zwei Punkte von X sich durch eine Kurve verbinden lassen, genauer: für je zwei Punkte

$$p, q \in X$$

gibt es eine stetige Abbildung γ: $[0,1] \longrightarrow X$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Dieser Begriff ist im Kontext der Zariski-Topologie eher unbedeutend. Für die gewöhnliche Topologie bietet er oft eine bequeme Methode für den Nachweis, daß ein topologischer Raum zusammenhängend ist. Wir erwähnen hier nur die wichtigsten Eigenschaften:

1[12] Jedes (nicht-leere) abgeschlossenen Intervall [a, b] der reellen Geraden ist zusammenhängend bezüglich der gewöhnlichen Topologie.

$$V(p_i) = X_i \text{ für } i = 1,..., r.$$

Für jedes i ist damit

$$I(X_i) = I(V(p_i)) = \sqrt{p_i} = p_i .$$

[12] Andernfalls gäbe es nicht-leere offene Teilmengen $U, V \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$[a, b] = U \bigcup V \text{ und } U \bigcap V = \emptyset.$$

Als Komplemente voneinander sind U und V auch abgeschlossen. Als abgeschlossene und beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind sie kompakt.

Die identische Abbildung $U \longrightarrow \mathbb{R}$ nimmt in U ein Minimum u' und ein Maximum u" an. Das gilt auch für die identishe Abbildung $V \longrightarrow \mathbb{R}$: es wird ein Minimum v' und ein Maximum v" angenommen. Weil die reellen Zahlen linear geordnet sind, gilt

$$u'' \le v' \text{ oder } v' \le u''.$$

Weil U und V disjunkt sind, müssen diese Ungleichungen echt sein. Im ersten Fall gilt

$$a \le u \le u'' < v' \le v \le b \text{ für beliebige } u \in U \text{ und beliebige } v \in V.$$

2[13] Sei X eine wegeweise zusammenhängender topologischer Raum, d.h. Dann ist X zusammenhängend.
3[14] Sei

Die Zahlen im Intervall (u", v') liegen dann weder in U noch in V im Widerspruch zur Wahl von U und V. Also muß gelten

$$v' < u''. \quad (1)$$

Die Menge

$$\{x \in U \mid v' \le x \le u''\} = U \cap [v', u'']$$

ist abgeschlossen, also kompakt. Sie enthält deshalb eine minimale reelle Zahl, sagen wir $\tilde{u}$. Es gilt dann $v' < \tilde{u} \le u''$ und $[v', \tilde{u}') \subseteq V$. Dann ist aber $\tilde{u}$ ein Berührungspunkt von V, und weil V kompakt ist, muß $\tilde{u} \in V$. Das steht im Widerspruch dazu, daß U und V disjunkt sein sollen. Also ist [a, b] zusammenhängend.

[13] Angenommen, es gibt echte abgeschlossene Teilmengen A und B von X mit

$$X = A \cup B.$$

Wir wählen Punkte $a \in A$ und $b \in B$ und eine Kurve $\gamma:[0,1] \longrightarrow X$, die diese Punkte verbindet. Dann sind $\gamma^{-1}(A)$ und $\gamma^{-1}(B)$ echte abgeschlossene Teilmengen von [0,1] mit

$$[0,1] = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$$

im Widerspruch dazu, daß [0,1] zusammenhängend ist.

[14] 1. <u>Schritt</u>. $A \cup B$ ist nicht wegeweise zusammenhängend.

Seien $a \in A$ und $b \in B$ zwei Punkte. Es reicht zu zeigen, diese beiden Punkte lassen sich nicht durh einen Weg verbinden Angenommen es gibt einen solchen Weg, sagen wir

$$\omega: [u, v] \longrightarrow A \cup B\ ,\ \omega \text{ stetig, } \omega(u) = a,\ \omega(v) = b.$$

Wegen ω stetig und [u, v] kompakt ist

$$\omega([u, v]) \text{ kompakt.}$$

Die Menge

$$B = (A \cup B) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

ist Abgeschlossen in $A \cup B$. Also ist

$\omega^{-1}(B)$ abgeschlossen in [u, v],

also kompakt. Es gibt deshalb ein minimales $\tilde{u} \in \omega^{-1}(B)$, d.h. eine solche reelle Zahl von $\omega^{-1}(B)$, daß $\omega(t)$ nicht in B liegt für $t < \tilde{u}$,

$$\omega((u, \tilde{u})) \cap B = \varnothing$$

Der Punkt $\tilde{u} \in [\tilde{u}, v]$ ist deshalb der einzige Punkt des Intervalls $[u, \tilde{u}]$, dessen Bild in B liegt,

$\omega([u, \tilde{u}]) \cap B$ besteht aus nur einen Punkt mit der Abszisse 0. (1)

Bezeichne $p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die X-Achse. Weil $p \circ \omega$ stetig ist, nimmt diese Funktion auf $[u, \tilde{u}]$ jeden Wert zwischen $p(\omega(u)) = p(a) =: \alpha > 0$ und $p(\omega(\tilde{u})) = 0$ an, und den Wert 0 nur in $\tilde{u}$:

$\omega([u, \tilde{u})) \subseteq A$ besteht aus Punkten, deren Abszissen jeden Wert aus dem Intervall (2)
$(0, a_x)$ annehmen können.

Die Punkte von A mit den Abszissen aus $(0, \alpha)$ bilden eine Welle, deren Wellenberge bei Annährung an die Y-Achse sich immer enger zusammendrängen. Für

$$-1 \le \beta \le +1$$

$$A := \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid 0 < x \in \mathbb{R}\}$$

das Bild der positiven reellen Geraden bei der stetigen Abbilung

$$f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \sin\frac{1}{x}),$$

und

$$B := \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

das Bild der reellen Geraden bei der stetigen Abbildung

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, y \mapsto (0, y).$$

Die Mengen A und B sind als stetige Bilder von $(0, \infty)$ bzw. $\mathbb{R}$ wegeweise zusammenhängend. Behauptung:

$A \bigcup B$ ist zusammenhängend aber nicht wegeweise zusammenhängend.

Bemerkungen

(i) Die Abschließung einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.

(ii) Sei $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raums X. Keine zwei der Y_α seien getrennt. Dann ist

$$Y = \bigcup_{\alpha\in I} Y_\alpha$$

zusammenhängend.

(iii) Sei X ein topologischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen.
  (a) Jede zusammenhängende Teilmenge von X (z.B. jeder Punkt) liegt in einer Zusammenhangskomponente von X.
  (b) Je zwei Zusammenhangskomponenten von X sind getrennt.
  (c) Jede Zusammenhangskomponente von X ist abgeschlossen in X.

Beweis. Zu (i). Seien X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine zusammenhängende Teilmenge. Angenommen die Abschließung $\overline{Y}$ von Y läßt sich in der Gestalt

$$\overline{Y} = A \bigcup B$$

schreiben mit disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A und B von $\overline{Y}$. Dann gilt

---

schneidet sich A mit der Geraden $y = \beta$ in Punkten, die sich im Schnittpunkt dieser Geraden mit der Y-Achse häufen. Die Punkte der Y-Achse mit einer Ordinate zwischen -1 und +1 sind deshalb Häufungspunkte der Menge

$$\omega([u, \tilde{u}]).$$

Diese Menge ist aber als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt und deshalb abgeschlossen. Die Punkte auf der Y-Achse mit dieser Ordinate sind deshalb Punkte von $\omega([u, \tilde{u}])$. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl von $\tilde{u}$ (vgl. (1)). Dieser Widerspruch zeigt, daß der Weg ω nicht existieren kann, d.h. $A\bigcup B$ ist nicht wegeweise zusammenhängend. Die linearen Komponenten von $A\bigcup B$ ist A und B.

2. Schritt: $A \bigcup B$ ist zusammenhängend.

Die Mengen A und B sind linear zusammenhängend, also zusammenhängend. Wären sie Komponenten von $A\bigcup B$, so wären sie abgeschlossen in $A\bigcup B$. Im ersten Schritt haben wir aber gesehen, daß die Abschließung von A Punkte mit der Y-Achse B gemeinsam hat,

$$\overline{A} \bigcap B \supseteq \{(x, y) \mid x = 0, -1 \le y \le +1\}.$$

Insbesondere sind die Mengen A und B nicht getrennt. Nach Bemerkung 1.2.7 (ii) ist

$$A \bigcup B$$

zusammenhängend.

$$Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B),$$

wobei die Durchschnitte $Y \cap A$ und $Y \cap B$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen von Y sind. Weil Y zusammenhängend ist, können nicht beide echt in Y enthalten sein. Es gilt, sagen wir

$$Y = Y \cap A,$$

also $Y \subseteq A$. Weil A abgeschlossen ist in $\overline{Y}$, folgt $\overline{Y} \subseteq A$, also $A = \overline{Y}$. Wir haben gezeigt, die Mengen A, B der Zerlegung von $\overline{Y}$ liegen nicht beide echt in $\overline{Y}$, d.h. $\overline{Y}$ ist zusammenhängend.

<u>Zu</u> (ii). Angenommen, Y läßt sich in der Gestalt

$$Y = A \cup B$$

schreiben mit disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A und B von Y. Für jedes $\alpha \in I$ gilt dann

$$Y_\alpha = (Y_\alpha \cap A) \cup (Y_\alpha \cap B),$$

wobei die Durchschnitte $Y_\alpha \cap A$ und $Y_\alpha \cap B$ disjunkte abgeschlossene Teilmengen von Y_α sind. Weil Y_α zusammenhängend ist, können nicht beide echt in Y_α enthalten sein. Es gilt

$$Y_\alpha = Y_\alpha \cap A \text{ oder } Y_\alpha = Y_\alpha \cap B,$$

d.h.

$$Y_\alpha \subseteq A \text{ oder } Y_\alpha \subseteq B,$$

Der Fall, daß für zwei verschiedene $\alpha \in I$ das eine Y_α in A und das andere in B liegt, kann nicht eintreten, denn dann wären die beiden Y_α getrennt: der Durchschnitt ihrer Abschließungen würde in $A \cap B = \emptyset$ liegen. Die Y_α liegen also alle in A oder alle in B, d.h.

$$Y \subseteq A \text{ oder } Y \subseteq B.$$

Wir haben gezeigt, Y ist zusammenhängend.

<u>Zu</u> (iii) (c). Die Aussage folgt aus Bemerkung (i).

<u>Zu</u> (iii) (a). Sei $A \subseteq X$ eine nicht-leere zusammenhängende Teilmenge von X (zum Beispiel eine einpunktige Teilmenge). Wir definieren

$$C := \bigcup \{Y \subseteq X \mid A \subseteq Y \text{ und } Y \text{ zusammenhängend}\}$$

als die Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die die Menge A enthalten. Nach Bemerkung (ii) ist

C zusammenhängend.

Es reicht zu zeigen, C ist eine Zusammenhangskomponente, d.h. C liegt nicht in einer echt größeren Teilmenge von X, die zusammenhängend ist. Angenommen es gilt

$$C \subseteq D \subseteq X \text{ mit } D \text{ zusammenhängend.}$$

Dann gilt $A \subseteq D$, also $D \subseteq C$ (auf Grund der Definition von C), also $D = C$.

<u>Zu</u> (iii) (b). Seien C' und C'' zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten von X. Wären sie nicht getrennt, so wäre $C' \cup C''$ nach Bemerkung (ii) zusammenhängend. Dies steht aber im Widerspruch dazu, daß C' und C'' Zusammenhangskomponenten also maximal sein sollen. Deshalb sind C' und C'' getrennt.

QED.

1.2.8 Aufgaben

(1)[15] (a) Ein noetherscher Raum X besitzt nur endlich viele Zusammenhangs-komponenten.
(b)[16] Jede Zusammenhangskomponente von X ist Vereinigung von irreduziblen Komponenten.

(2)[17] Eine abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq V = k^n$ ist genau dann unzusammenhängend, wenn es zwei echte Ideale I', I" von k[T] gibt mit

$$I' + I'' = k[T] \text{ und } I' \cap I'' = I(X).$$

---

[15] Die Aussage folgt aus (b), weil die Anzahl der irreduziblen Kompoenten endlich ist (nach 1.2.4).

[16] Seien $X_1, \ldots, X_r$ die irreduziblen Komponenten von X. Weiter sei C eine Zusammenhangskomponente von X. Jedes X_i, welches mit C Punkte gemeinsam hat, liegt ganz in C (weil X_i zusammenhängend ist). Seien $X_{i_1},\ldots,X_{i_s}$ die irreduziblen Komponenten, die Punkte mit C geminsam haben. Dann gilt

$$X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_s} \subseteq C.$$

Jeder Punkt $p \in C - X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_s}$ liegt dann in einer Komponente von X, die mit C keine Punkte gemainsam hat. Dann kann p aber nicht in C liegen. Die Differenz muß leer sein, d.h. es gilt

$$C = X_{i_1} \cup \ldots \cup X_{i_s}.$$

[17] Es gilt:

X ist unzusammenhängend $\Leftrightarrow$ es gibt Ideale $I', I'' \subseteq k[T]$ mit

$$X = V(I') \cup V(I'') \text{ und } V(I') \cap V(I'') = \emptyset$$

V(I') und V(I") sind echt enthalten in X

Die Bedingung, daß V(I') und V(I") echt in X enthalten sein sollen, kann man durch die Bedingung ersetzen, daß V(I') und V(I") nicht leer sind. Letzteres ist aber nach dem Hilbertschen Nullstellensatz äquivalent dazu, daß I' und I" echte Ideale sind (die 1 nicht enthalten). Es gilt also

X ist unzusammenhängend $\Leftrightarrow$ es gibt echte Ideale $I', I'' \subseteq k[T]$ mit

$$X = V(I') \cup V(I'') \text{ und } V(I') \cap V(I'') = \emptyset$$

Falls die Ideale I' und I" existieren, kann man sie durch deren Radikale ersetzen, d.h.

X ist unzusammenhängend $\Leftrightarrow$ es gibt echte radikale Ideale $I', I'' \subseteq k[T]$ mit

$$V(I(X)) = V(I' \cap I'') \text{ und } V(I' + I'') = \emptyset$$

$\Leftrightarrow$ es gibt echte radikale Ideale $I', I'' \subseteq k[T]$ mit

$$\sqrt{I(X)} = \sqrt{I' \cap I''} \text{ und } I' + I'' = k[T]$$

Wir haben hier Aussage (1) von Aufgabe 1.1.4 (3) benutzt und den Hilbertschen Nullstellensatz. Weil die Ideale I(X), I' und I" radikal sind, kann man die Wurzelzeichen weglassen. Es folgt

X ist unzusammenhängend $\Leftrightarrow$ es gibt echte radikale Ideale $I', I'' \subseteq k[T]$ mit

$$I(X) = I' \cap I'' \text{ und } I' + I'' = k[T].$$

Das ist aber gerade die Behauptung. Man beachte, aus

$$I(X) = I' \cap I'' \text{ und } I' + I'' = k[T].$$

folgt auch ohne die Annahme der Radikalität der Ideale I' und I", daß gilt

$$X = V(I(X)) = V(I' \cap I'') = V(I') \cup V(I'')$$

und

$$V(I') \cap V(I'') = V(I' + I'') = \emptyset,$$

d.h. X ist unzusammenhängend (falls die Ideale I' und I" echt sind).

(3)[18] Sei $X = \{(x,y) \in k^2 \mid xy = 0\}$. Dann ist X eine abgeschlossene Teilmenge von k^2, welche zusammenhängend ist aber nicht irreduzibel.

1.2.9 Abschließung irreduzibler Komponenten

Seien X ein noetherscher topologischer Raum, $Y \subseteq X$ ein Unterraum und

$$Y_1, \dots , Y_n$$

die irreduziblen Komponenten von Y. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Die Abschließungen $\overline{Y}_i$ der Y_i in X sind die irreduziblen Komponenten der Abschließung $\overline{Y}$ von Y in X.

(ii) Für i = 1,..., n gilt

$$\overline{Y}_i \cap Y = Y_i.$$

Beweis. Zu (ii). Trivialerweise gilt

$$Y_i \subseteq \overline{Y}_i \cap Y.$$

Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$z \in \overline{Y}_i \cap Y.$$

Dann ist z ein Berührungspunkt von $\overline{Y}_i$ (in X), d.h. jede offene Umgebung U von z (in X) hat Punkte gemeinsam mit Y_i ,

$$U \cap Y_i \neq \emptyset.$$

Dann hat aber jede offene Umgebung von $U \cap Y$ von z (in Y) ebenfalls Punkte gemeinsam mit Y_i , denn es gilt

$$(U \cap Y) \cap Y_i = U \cap Y_i \neq \emptyset$$

(wegen $Y_i \subseteq Y$). Mit anderen Worten, z ist Berührungspunkt von Y_i (in Y). Weil Y_i als irreduzible Komponente von Y abgeschlossen in Y ist (vgl. 1.2.3 (i)), folgt

$$z \in Y_i.$$

Damit besteht auch die umgekehrste Inklusion.

Zu (ii). Mit

$$Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$$

gilt auch

$$\overline{Y} = \overline{Y}_1 \cup \dots \cup \overline{Y}_n$$

(vgl. Kelley [2], 1.4.3 (iv)). Außerdem ist

$$\overline{Y}_i \text{ irreduzibel für } i = 1, \dots, n$$

---

[18] Es gilt

$$X = V(xy) = V(x) \cup V(y) = V(x \bullet k[x,y]) \cup V(y \bullet k[x,y])$$

Weil V(x) und V(y) echte abgeschlossene Teilmengen von X sind, ist X reduzibel. Weil

$$x \bullet k[x, y] \text{ und } y \bullet k[x,y]$$

Primideale des Polynomrings k[x, y] sind, sind V(x) und V(y) irreduzible algebraische Mengen also insbesondere zusammenhängend. Weil

$$V(x) \cap V(y) = \{(0,0)\}$$

nicht leer ist, ist auch $X = V(x) \cup V(y)$ zusammenhängend.

(nach 1.2.3 (i)).

Alle irreduziblen Komponenten von $\overline{Y}$ kommen unter den $\overline{Y}_i$ vor (vgl. 1.2.4 (ii)). Es reicht zu zeigen, daß außer den irreduziblen Komponenten von $\overline{Y}$ keine weiteren Mengen unter den Y_i vorkommen.

Angenommen, $\overline{Y}_i$ ist keine irreduzible Komponente von $\overline{Y}$. Dann ist aber $\overline{Y}_i$ ganz in einer irreduziblen Komponente von $\overline{Y}$ enthalten (vgl. 1.2.4 (i)), d.h.

es gibt ein j mit $\overline{Y}_i \subseteq \overline{Y}_j$ und $\overline{Y}_j$ irreduzible Komponente von $\overline{Y}$.

Insbesondere ist

$$j \neq i.$$

Es folgt

$$Y_i \subseteq \overline{Y}_i \subseteq \overline{Y}_j.$$

Wir bilden die Durchschnitte mit Y und erhalten

$$Y_i \subseteq \overline{Y}_j \cap Y.$$

Der Durchschnitt rechts ist - weil $\overline{Y}_j$ eine irreduzible Komponente von $\overline{Y}$ ist - gleich Y_j.
Es gilt also

$$Y_i \subseteq Y_j.$$

Das steht aber im Widerspruch dazu, daß Y_i und Y_j unterschiedliche irreduzible Komponenten von Y sein sollen (d.h. maximale irreduzible Teilmengen von Y). Dieser Widerspruch zeigt, jedes $\overline{Y}_i$ ist eine irreduzible Komponente von $\overline{Y}$.

QED.

1.3 Affine Algebren

Mit der Einführung der Zariski-Topologie stehen uns bei der Untersuchung der polynomialen Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen V(I) die Methoden der Topologie zur Verfügung.
Wir kommen jetzt zu einem weiteren Hilfsmittel: zum besseren Verständnis der algebraischen Mengen interessieren wir uns für die auf diesen Mengen definierten Funktionen.

1.3.1 Koordinatenringe, affine Algebren, Einbettungen in den k^n

Sei

$$X \subseteq V := k^n$$

eine algebraische Menge. Die Einschränkungen der polynomialen Funktionen von

$$S := k[T]$$

auf X bilden eine k-Algebra, die wir mit k[X] bezeichnen und die isomorph ist zu

$$k[X] \cong k[T]/I(X).$$

Sie heißt affiner Koordinatenring von X über k. Diese Algebra hat die folgenden Eigenschaften.

(a) k[X] ist eine endlich erzeugte k-Algebra, d.h. es gibt Elemente

$$f_1, \dots, f_r \in k[X]$$

mit

$$k[X] = k[f_1, \dots, f_r].$$

(b) k[X] ist reduziert, d.h. 0 ist das einzige nilpotente Element von X.

Eine Algebra mit diesen beiden Eigenschaften wollen wir hier affine Algebra[19] nennen. Für jede affine k-Algebra gibt es ein n und eine algebraische Menge

$$X \subseteq k^n$$

mit $A \cong k[X]$.[20]

Bemerkungen

(i) Die Bezeichnung Koordinaten-Ring für den Rinkg k[X] kommt von der Tatsache, daß die Einschränkungen der Koordinaten-Funktionen

$$T_i: k^n \longrightarrow k, \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \mapsto c_i ,$$

auf X in k[X] liegen und diesen Ring über k erzeugen: jedes $f \in k[X]$ ist ein Polynom in den Einschränkungen $x_i = T_i|_X$ mit Koeffizienten aus k.

(ii) Die Einschränkungen x_i gestatten es, die abstrakte Menge X mit der ursprünglichen in den k^n eingebetteten Menge X zu identifizieren: die Abbildung

$$\varphi: X \longrightarrow k^n,\ p \mapsto \begin{pmatrix} x_1(p) \\ \dots \\ x_n(p) \end{pmatrix},$$

ist injektiv und stimmt mit der natürlichen Einbettung $X \hookrightarrow k^n$ überein.

(iii) Seien $y_1,\dots,y_m \in k[X]$ Elemente, welche die Algebra k[X] über k erzeugen. Dann ist die Abbildung

$$\psi: X \longrightarrow k^m,\ p \mapsto \begin{pmatrix} y_1(p) \\ \dots \\ y_m(p) \end{pmatrix},$$

injektiv und identifiziert X mit einer algebraischen Teilmenge des k^m.

---

[19] Normalerweise wird in der Definition Forderung (b) weggelassen, denn sie kann einfache Konstruktionen ärgerlich kompliziert machen und die funktorialen Eigenschaften einer Konstruktion verschlechtern, vgl. Jacobson, N.: Basic algebra, Band II, Kapitel 8, Abschnitt 13.
Im Zusammenhang mit infinitesimalen Phänomen sind Algebren, die nicht reduziert sind, besonders interessant.

Wir stellen diese Forderung hier trotzdem, weil in der Theorie, die wir hier entwickeln wollen, so gut wie alle endlich erzeugten Algebren reduziert sind.

[20] Ist $A = k[f_1, \dots , f_r]$ und ist I der Kern des k-Algebra-Homomorphismus

$$h: k[T_1, \dots , T_r] \longrightarrow A,\ f(T_1, \dots , T_r) \mapsto f(f_1, \dots , f_r),$$

So gilt $A \cong k[T_1, \dots , T_r]/I$, d.h. I ist ein radikales Ideal. Mit $X := V(I)$ ist

$$I(X) = I(V(I)) = \sqrt{I} = I.$$

Es folgt

$$A \cong k[T_1, \dots , T_r]/I(X) \cong k[X].$$

(iv) Wir zeigen in den nachfolgenden Punkten 1.3.2 und 1.3.3, daß die algebraische Menge X und ihre Zariski-Topologie durch die Algebra k[X] bestimmt werden.

Beweis von (iii). Injektivität der Abbildung Weil die y_i die Algebra k[X] erzeugen und die $x_j = T_j|_X$ in dieser Algebra liegen, gibt es Polynome $f_1, \ldots, f_n$ mit Koeffizienten in k mit

$$x_j = f_j(y_1,\ldots, y_m)$$

für j = 1,..., n.

Wir setzen die Abbildung ψ von (iii) zusammen mit der Abbildung

$$f:k^m \longrightarrow k^n,\ p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \cdots \\ p_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(p) \\ \cdots \\ f_n(p) \end{pmatrix}$$

und erhalten die Abbildung

$$f\circ\psi:X \longrightarrow k^n,\ p \mapsto \begin{pmatrix} f_1(y_1(p),\ldots,y_m(p)) \\ \cdots \\ f_n(y_1(p),\ldots,y_m(p)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(p) \\ \cdots \\ x_n(p) \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist injektiv, denn es ist gerade die natüriche Einbettung $X \hookrightarrow k^n$,

$$\varphi = f\circ\psi. \qquad (1)$$

Mit f∘ψ ist auch ψ injektiv.

Im(ψ) ist eine algebraische Menge. Zum Beweis dieser Aussage benötigen wir den Begriffs des maximalen Spektrums und eine wichtige Eigenschaft dieses Begriffs. Wir verschieben deshalb den Beweis bis zum Ende des übernächsten Punktes 1.3.3.

QED.

1.3.2 Ideale von k[X], das maximale Spektrum und die Ideale M_x

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge, $I \subseteq k[X]$ ein Ideal und

$$V_X(I) := \{ x \in X \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in I\}$$

die Menge der gemeinsamen Nullstellen aller $f \in I$.

Für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ bezeichnen wir mit

$$I_X(Y) := \{f \in k[X] \mid f(y) = 0 \text{ für jedes } y \in Y\}$$

das Ideal der Funktionen von k[X], die in allen Punkten von Y gleich Null sind.

Für jede affine Algebra A bezeichnen wir mit[21]

---

[21] Im Buch von Springer wird diese Menge mit Max(A) bezeichnet. Die Bezeichnung des maximalen Spektrums ist in der Literatur nicht einheitlich. Zum Beispiel findet man die

Bezeichnung	im Buch
m-Spec(A)	Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge University Press, Cambridge 1986
max-Spec(A)	Eisenbud, D.: Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry, Springer, New York 1995
Maxspec(A)	Jacobson, N.: Basic algebra, Dover Publications, Mineola, N.Y., 1980

Specm wird gelegentlich in der französichen Literatur benutzt, möglicherweise für Spectre maximal.

$$\mathrm{Specm}(A) := \{m \subseteq A \mid m \text{ ist maximales Ideal von } A\}.$$

die Menge der maximalen Ideale von A. Sie wird <u>maximales Spektrum</u> von A genannt.

Ist $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge und $x \in X$ ein Punkt von X, so ist

$$M_x := I_X(\{x\})$$

ein maximalen Ideal von k[X].[22]

Bemerkung

Für jeden Punkt

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix} \in X \subseteq k^n$$

ist die Abbildung

$$k[X] \longrightarrow k, f \mapsto f(p)$$

ein surjektiver k-Algbra-Homomorphismus mit dem Kern M_p , induziert also einen Isomorphismus von k-Algebren

$$k[X]/M_p \xrightarrow{\cong} k.$$

Benutzt man diesem Isomorphismus um k mit dem Faktorring auf der linken Seite zu identifizieren, so gilt

$$f(p) \quad = f \bmod M_p \text{ für jedes } f \in k[X].$$

Das Ideal M_p von k[X] wird von den Funktionen $T_i|_X - p_i \in k[X]$ erzeugt:

$$M_p = (T_1 - p_1 |_X , \dots , T_n - p_n |_X)\bullet k[X] .$$

Beweis. Die Auswertung im Punkt p definiert k-Algebra-Homomorphismen

$$\varphi_p: k[T] \longrightarrow k, f \mapsto f(p),$$

$$\overline{\varphi}_p: k[X] \longrightarrow k, f \mapsto f(p).$$

Diese sind surjektiv, denn für jedes $c \in k$ ist der Wert von c in p gleich c. Auf Grund des Homomorphie-Satzes faktorisieren sie sich über den Faktorring ihrer Definitionsbereiche modulo ihrer Kerne:

$$\varphi_p: k[T] \overset{\gamma}{\twoheadrightarrow} k[T]/\ker(\varphi) \underset{\tilde{\varphi}_p}{\xrightarrow{\cong}} k, f \mapsto f \bmod \mathrm{Ker}(\varphi) \mapsto f(p).$$

---

[22] Die Abbildung $k[X] \longrightarrow k, f \mapsto f(x)$, ist ein Homomorphismus von k-Algebra, welcher surjektiv ist und den Kern M_x besitzt. Nach dem Homomorphiesatzt gilt $k[X]/M_x \cong k$, d.h. $k[X]/M_x$ ist ein Körper.

$$\varphi_{X,p}\colon k[X] \overset{\gamma_X}{\twoheadrightarrow} k[X]/\ker(\varphi_{X,p}) \underset{\tilde\varphi_{X,p}}{\overset{\cong}{\longrightarrow}} k,\ f \mapsto f \bmod \mathrm{Ker}(\varphi_{X,p}) \mapsto f(p).$$

Dabei sind die natürlichen Homomorphismen auf den Faktorring γ und γ_X surjektiv und die induzierten Homomorphismen $\tilde\varphi_p$ und $\tilde\varphi_{X,p}$ bijektiv. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von k-Algebra-Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
 & k[T] \arrow[r, two heads, "\rho"] \arrow[d, two heads, "\gamma"'] \arrow[dr, "\varphi_p"] & k[X] \arrow[d, two heads, "\varphi_{X,p}"] \arrow[dr, "\gamma_X"] & \\
 & k[T]/\ker(\varphi_p) \arrow[r, "\cong", "\tilde\varphi_p"'] & k & k[X]/\mathrm{Ker}\ \varphi_{X,p} \arrow[l, "\cong"', "\tilde\varphi_{X,p}"]
\end{tikzcd}$$

Dabei soll

$$\rho\colon k[T] \longrightarrow k[X],\ f \mapsto f|_X$$

der Einschränkungshomomorphismus sein. Das linke und das rechte Dreieck ist kommutativ nach Definition von $\tilde\varphi_p$ und $\tilde\varphi_{X,p}$. Das in der Mitte ist es wegen

$$(f|_X)(p) = f(p).$$

Benutzt man die unteren Isomorphismen zur Identifikation der beiden äußeren Faktorringe mit k, so übersetzt sich die Kommutativität der beiden äußeren Dreiecke in die Aussagen

$$f(p) = f \bmod \ker(\varphi_p) \qquad \text{für jedes } f \in k[T]$$

$$f(p) = f \bmod \ker(\varphi_{X,p}) \qquad \text{für jedes } f \in k[X]$$

Die erste Aussage ist gerade der Spezialfall mit $X = k^n$ der zweiten. Nach Definition der Abbildung $\varphi_{X,p}$ gilt

$$\ker(\varphi_{X,p}) = \{f \in k[X] \mid f(p) = 0\} = I_X(\{p\}) = M_p,$$

d.h. die zweite Aussage läßt sich auch in der Gestalt

$$f(p) = f \bmod M_p \in k[X]/M_p = k \text{ für jedes } f \in k[X]$$

schreiben.

Wir haben noch die Erzeugenden des Ideals M_p zu bestimmen. Auf Grund der Kommuttivität des mittleren Vierecks gilt

$$\begin{aligned}
\ker(\varphi_p) &= \varphi_p^{-1}(0)\\
&= (\varphi_{X,p}\circ\rho)^{-1}(0)\\
&= \rho^{-1}(\varphi_{X,p}^{-1}(0))\\
&= \rho^{-1}(\ker(\varphi_{X,p}))\\
&= \rho^{-1}(M_p).
\end{aligned}$$

Weil ρ surjektiv ist, folgt

$$M_p = \rho(\rho^{-1}(M_p)) = \rho(\ker(\varphi_p))$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$\mathrm{Ker}(\varphi_p) = (T_1-p_1,...,T_n-p_n)\bullet K[T],$$

(1)
denn dann ist

$$\begin{aligned} M_p &= \rho(\ker(\varphi_p)) \\ &= \rho((T_1-p_1,...,T_n-p_n)\bullet K[T]) \\ &= (\rho(T_1)-p_1,...,\rho(T_n)-p_n)\bullet K[X] \\ &= (T_1|_X-p_1,...,T_n|_X-p_n)\bullet K[X] \end{aligned}$$

Man beachte, (1) ist gerade die Aussage

$$M_p = (T_1-p_1,...,T_n-p_n)\bullet K[T] \text{ im Fall } X = k^n$$

(2)

Nehmen wir also an,

$$X = k^n$$

und zeigen, daß (2) gilt.Nach Definition von p ist T_i-p_i für jedes i im Punkt p gleich Null, d.h. es gilt

$$T_i\text{-}p_i \in M_p \text{ für } i = 1,..., n.$$

Damit besteht die Inklusion

$$I := (T_1-p_1,...,T_n-p_n)\bullet K[T] \subseteq M_p.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß I ein maximalen Ideal von k[T] ist, d.h. der Faktorring bezüglich I ist ein Körper. Es reicht zu zeigen, der k-Algebra-Homomorphismus

$$\psi{:}k \longrightarrow k[T_1,...,T_n]/(T_1-p_1,...,T_n-p_n),\ c \mapsto c \bmod (T_1-p_1,...,T_n-p_n),$$

ist bijektiv. Weil k ein Körper ist, also nur die Ideale 0 und k besitzt, ist die Abbildung injektiv.[23] Für jedes $f \in k[T]$ gilt

$$\begin{aligned} f(T_1,...,T_n) \bmod (T_1-p_1,...,T_n-p_n) &= f(p_1,...,p_n)) \bmod (T_1-p_1,...,T_n-p_n) \\ &= \psi(f(p)), \end{aligned}$$

d.h. ψ ist auch surjektiv.
QED.

1.3.3 Propostion: Punkte und maximale Ideale

(i) Sei $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Dann ist die Abbildung

$$X \longrightarrow \mathrm{Specm}\, k[X],\ x \mapsto M_x ,$$

[23] Wäre k der Kern der Abbildung, so läge 1 im Kern, d.h. es wäre $1 \in I \subseteq M_p = I(\{p\})$, also $I(\{p\}) = k[T]$, im Widerspruch zum Hilbertschen Nullstellensatz.

bijektiv. Außerdem besteht für jedes Ideal $I \subseteq k[X]$ die Äquivalenz

$$x \in V_X(I) \Leftrightarrow I \subseteq M_x .$$

(ii) Die abgeschlossenen Mengen von X sind gerade die Mengen der Gestalt $V_X(I)$, wobei I die radikalen Ideale von k[X] durchlaufe.

Beweis. Zu (i). Die Abbildung ist injektiv. Sind x' und x" zwei verschiedene Punkte von X. Dann gibt es ein j derart, daß die j-ten Koordinaten von x' und x" verschieden sind,

$$x'_j \neq x''_j.$$

Dann ist das Polynom $T_j - x'_j$ gleich Null in x' aber nicht in x". Für die Einschränkung dieses Polynoms auf X gilt dasselbe, d.h.

$$f_j := T_j - x'_j|_X \in k[X]$$

liegt in $M_{x'}$, aber nicht in $M_{x''}$, d.h. die beiden maximalen Ideale sind verschieden.

Die Abbildung ist surjektiv.

Sei $M \in \mathrm{Specm}\, k[X]$ vorgegeben. Dann ist M ein echtes Ideal von k[X]. Dasselbe gilt damit auch für das vollständige Urbild $\tilde{M}$ von M beim natürlichen Homomorphismus

$$\rho: k[T] \longrightarrow k[X],\ f \mapsto f|_X .$$

Weil I(X) der Kern dieser Abbildung ist, gilt

$$I(X) = \rho^{-1}(0) \subseteq \rho^{-1}(M) = \tilde{M} \qquad (1)$$

Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz 1.1.2 (i) ist $V(\tilde{M})$ nicht leer. Sei $x \in V(\tilde{M})$. Zusammen mit (1) folgt

$$x \in V(\tilde{M}) \subseteq V(I(X)) = X.$$

Für $f \in k[T]$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow (f|_X)(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho(f) \in M_x \\ &\Leftrightarrow f \in \rho^{-1}(M_x), \end{aligned}$$

d.h.

$$I(\{x\}) = \rho^{-1}(M_x). \qquad (2)$$

Zusammen mit $x \in V(\tilde{M})$ und (1) ergibt sich

$$\rho^{-1}(M_x) = I(\{x\}) \supseteq I(V(\tilde{M})) \supseteq \tilde{M} = \rho^{-1}(M)$$

Wir gehen zu den Bildern bei ρ über und erhalten auf Grund der Surjektivität von ρ:

$$M_x \supseteq M$$

Weil M_x ein echtes und M ein maximales Ideal von k[X] ist, folgt $M = M_x$.

Die beiden Bedingungen sind äquivalent.

$$\begin{aligned} x \in V_X(I) \quad &\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ für } f \in I \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ für } f \in \rho^{-1}(I) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \rho^{-1}(I) \subseteq I(\{x\}) \; (= \rho^{-1}(M_x) \text{ nach (2)})$$

$$\Leftrightarrow I \subseteq M_x$$

Zu (ii). Die Abgeschlossenen Mengen von X sind nach Definition der Unterraum-Topologie gerade die Mengen der Gestalt

$$X \cap V(I), \text{ I ein Ideal von } k[T]$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in X \cap V(I) &\Leftrightarrow x \in X \text{ und } f(x) = 0 \text{ für } f \in I \\ &\Leftrightarrow x \in X \text{ und } (f|_X)(x) = 0 \text{ für } f \in I \\ &\Leftrightarrow x \in X \text{ und } \rho(f)(x) = 0 \text{ für } f \in I \\ &\Leftrightarrow x \in X \text{ und } g(x) = 0 \text{ für } g \in \rho(I) \\ &\Leftrightarrow x \in V_X(\rho(I)). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$X \cap V(I) = V_X(\rho(I)) \text{ für jedes Ideal I von } k[T].$$

Dabei ist $J := \rho(I)$ ein Ideal von k[X] für jedes Ideal I von k[T], und jedes Ideal J von k[X] hat diese Gestalt (wegen $J = \rho(\rho^{-1}(J))$).
QED.

Wir haben noch den zweiten Teil von Bemerkung 1.3.1 (iii) zu beweisen, nämlich, daß für jedes Erzeugenden-Sysstem

$$y_1, \dots , y_m \in k[X]$$

der k-Algebra k[X] das Bild der Abbildung

$$\psi: X \longrightarrow k^m, \, p \mapsto \begin{pmatrix} y_1(p) \\ \dots \\ y_m(p) \end{pmatrix}$$

eine algebraische Menge des k^m ist (für jede algebraische Menge $X \subseteq k^n$).

Beweis des zweiten Teils von Bemerkung 1.3.1 (iii). Wir führen neue Unbestimmte Y_j ein und betrachten den k-Algebra-Homomorphismus

$$\xi: k[Y_1,\dots,Y_m] \longrightarrow k[X], \, f(Y_1,\dots,Y_m) \mapsto f(y_1,\dots,y_m).$$

Weil die $x_j := T_j|_X \in k[X] \cong k[T]/I(X)$ die k-Algebra k[X] erzeugen, sind die y_i Polynome in den x_j, sagen wir wir

$$y_i = g_i(x_1, \dots , x_n) = g_i(T_1, \dots , T_n)|_X \text{ mit } g_i \in k[T]$$

Weil die y_i die k-Algebra k[X] erzeugen, ist der Homomorphismus ξ surjektiv, induziert also einen k-Algebra-Isomorphismus

$$\bar{\xi}: k[Y_1,\dots,Y_m]/I \xrightarrow{\cong} k[T_1,\dots,T_n]/I(X) \text{ mit } I := \mathrm{Ker}(\xi).$$

$$f(Y_1,\dots,Y_m) \bmod I \mapsto f(g_1,\dots,g_m) \bmod I(X).$$

Weil der Ring k[X] reduziert ist, ist das Ideal I radikal und damit von der Gestalt

$$I = I(X')$$

mit einer algebraischen Menge $X' = V(I) \subseteq k^m$. Die Abbildung $\bar{\xi}$ bekommt so die Gestalt

$$\bar{\xi}: k[X'] \xrightarrow{\cong} k[X].$$

$$f(Y_1,...,Y_m)|_{X'} \mapsto f(g_1,...,g_m)|_X.$$

Nach 1.3.1 (ii) ist die Abbildung

$$X' \longrightarrow k^m,\ q \mapsto \begin{pmatrix} Y_1(q) \\ \dots \\ Y_m(q) \end{pmatrix},$$

injektiv und stimmt mit der natürlichen Einbettung $X' \hookrightarrow k^m$ überein.

Für $p \in X$ gilt

$$M_p = (x_1\text{-}x_1(p), \dots , x_n(p)) \subseteq k[X].$$

Sei $q_i = g_i(p) \in k$ und $q \in k^m$ der Punkt mit den Koordinaten q_i. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(Y_j - q_j|_{X'}) &= g_j - q_j|_X \qquad (\bar{\xi} \text{ ist k-Algebra-Isomorphismus}) \\ &= g_j - g_j(p)|_X \end{aligned}$$

Diese Funktion ist Null im Punkt p, liegt also in M_p. Damit gilt

$$Y_j|_{X'} - q_j \subseteq \bar{\xi}^{-1}(M_p) \text{ für } j = 1, \dots , m.$$

Weil M_p ein maximales Ideal von k[X] und $\bar{\xi}$ ein Isomorphismus ist, ist $\bar{\xi}^{-1}(M_p)$ ein maximales Ideal von k[X']. Die Elemente $Y_j|_{X'} - q_j$ liegen in diesem maximalen Ideal. Sie erzeugen also ein echtes Ideal in k[X'], und dieses Ideal ist maximal. Deshalb gilt

$$M_q = \bar{\xi}^{-1}(M_p).$$

Insbesondere ist q ein Punkt von X':

Bezeichnet nämlich $\gamma: k[Y_1,...,Y_m] \longrightarrow k[Y_1,...,Y_m]/I(X') \cong k[X']$ die natürliche Surjektion. Dann gilt

$$I(X') = \ker(\gamma) = \gamma^{-1}(0) \subseteq \gamma^{-1}(M_q) = (Y_1\text{-}q_1,...,Y_m\text{-}q_m)\bullet k[Y_1,...,Y_m].$$

Man beachte, rechts steht ein maximales Ideal von $k[Y_1,...,Y_m]$, dessen Bild in k[X'] das maximale Ideal $M_q = (Y_1\text{-}q_1,...,Y_m\text{-}q_n)\bullet k[X']$ ist. Aus dieser Inklusion folgt die umgekehrte Inklusion für die Nullstellenmengen:

$$q \in V(Y_1\text{-}q_1,...,Y_m\text{-}q_m) \subseteq V(I(X')) = X',$$

d.h. der Punkt q = g(p) liegt tatsächlich in X' (für jedes $p \in X$).

Betrachten wir die folgende Zusammensetzung von Bijektionen:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\cong} & \text{Specm } k[X] & \xrightarrow{\cong} & \text{Specm } k[X'] & \xrightarrow{\cong} & X' \\ p & \mapsto & M_p & \mapsto & \bar{\xi}^{-1}(M_p)=M_{g(p)} & \mapsto & g(p). \end{array}$$

Die Abbildung ganz links soll dabei die Bijektion von 1.3.3 (i) sein, und die Abbildung ganz rechts das inverse dieser Bijektion (mit X' anstelle von X). Die Abbildung in der Mitte ist bijektiv, weil $\bar{\xi}$ ein Isomorphismus ist.

Also ist auch die Zusammensetzung bijektiv, d.h. die Abbildung

$$g|_X: X \longrightarrow X', p \mapsto \begin{pmatrix} g_1(p) \\ \dots \\ g_m(p) \end{pmatrix}.$$

Wegen $g_i|_X = y_i$ gilt außerdem

$$g_i(p) = y_i(p) \text{ für jedes } p \in X.$$

d.h. es ist $g|_X = \psi$, und Im(ψ) ist die algebraische Menge X'.
QED.

1.3.4 Aufgaben

Sei $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge.
(1)[24] Für jedes Ideal I von k[X] gilt $I_X(V_X(I)) = \sqrt{I}$.

---

[24] Beweis von "$\supseteq$": Sei $f \in \sqrt{I}$. Dann liegt eine Potenz von f in I, sagen wir $f^s \in I$. Für jedes $p \in V(I)$ gilt $0 = f^s(p)$, also $f(p) = 0$, d.h. es ist $f \in I(V(I))$.
Beweis von "$\subseteq$": Bezeichne ρ die Einschränkung auf X,

$$\rho: k[T] \longrightarrow k[X], f \mapsto f|_X .$$

Wir setzen

$$\tilde{I} := \rho^{-1}(I) \qquad (\supseteq \rho^{-1}(0) = I(X)).$$

Behauptung:

$$V(\tilde{I}) = V(I) \ (\subseteq X). \tag{*}$$

(wir schreiben oft V(I) vereinfachend für $V_X(I)$). Für $p \in V(\tilde{I})$ gilt wegen $\tilde{I} \supseteq I(X)$ automatisch auch

$$p \in V(I(X)) = X.$$

Liegt f in I, so gibt es ein Polynom $\tilde{f}$ mit $\rho(\tilde{f}) = \tilde{f}|_X = f \in I$, also mit $\tilde{f} \in \rho^{-1}(I) = \tilde{I}$. Es folgt

$$0 = \tilde{f}(p) = f(p).$$

Da dies für alle $f \in I$ gilt, folgt $p \in V(I)$. Wir haben gezeigt $V(\tilde{I}) \subseteq V(I)$.

Sei umgekehrt $p \in V(I)$ ($\subseteq X$). Für $f \in \tilde{I}$ gilt $f|_X \in I$ also

$$0 = (f|_X)(p) = f(p).$$

Da dies für alle $f \in \tilde{I}$ gilt, folgt $p \in V(\tilde{I})$. Damit ist (*) bewiesen.

Sei jetzt $f \in I(V(I))$. Wir wählen ein $\tilde{f} \in k[T]$ mit $\tilde{f}|_X = f$. Die Funktion $\tilde{f}$ ist dann auf $V(I) = V(\tilde{I})$ gleich Null. Nach Hilbert folgt $\tilde{f} \in \sqrt{\tilde{I}}$, d.h. eine Potenz von $\tilde{f}$ liegt in $\tilde{I}$, sagen wir

$$\tilde{f}^s \in \tilde{I}.$$

Für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ gilt $V_X(I_X(Y)) = \overline{Y}$.

(2)[25] Sei X mit der Zariski-Topologie versehen. Dann ist die Abbildung

$$\{\text{abgeschlossene Teilmengen von } X\} \longrightarrow \{\text{radikale Ideale von } k[X]\}$$
$$Y \mapsto I_X(Y)$$

bijekitiv.

(3)[26] Sei A eine affine k-Algebra. Definieren Sie eine bijketive Abbildung

$$\mathrm{Specm}(A) \longrightarrow \{\text{k-Algebra-Homomorphismen } A \longrightarrow k\}.$$

(4) (a)[27] X ist genau dann irreduzibel, wenn k[X] ein <u>Integritätsbereich</u> ist (d.h. es gibt keine Nullteiler $\neq 0$).

(b)[28] X ist genau dann zusammenhängend, wenn es in k[X] - {0,1} keine <u>idempotente Elemente</u> gibt (d.h. Elemente f mit $f^2 = f$).

Dann gilt $f^s = \tilde{f}^s|_X \in I$, also $f \in \sqrt{I}$. Damit ist der ersten Teil der Behauptung bewiesen.

Weil X abgeschlossen ist in k^n ist der Abschluß von Y in X derselbe wie der von Y in k^n, d.h. es ist

$$\begin{aligned}\overline{Y} = V(I(Y)) &= V(\{ f \in k[T] \mid f = 0 \text{ auf } Y \}) \\ &= V(\{ f \subseteq k[X] \mid f = 0 \text{ auf } Y \}) \quad (\text{wegen } Y \subseteq X \text{ und } (*)) \\ &= V(I_X(Y))\end{aligned}$$

[25] Für $X = k^n$ ist die Aussage bereits bewiesen. Durch Einschränken der Abbildung für den Fall $X = k^n$ auf die abgeschlossenen Teilmengen von X erhalten wir die Bijektivität der Abbildung

$$\{\text{abgeschlossene Teilmengen von } X\} \longrightarrow \{\text{radikale Ideale von } k[T] \text{ die } I(X) \text{ enthalten}\},\ Y \mapsto I(Y)$$

(weil $Y \subseteq X$ äquivalent ist zu $I(X) \subseteq I(Y)$ - für abgeschlossene Mengen). Die Behauptung folgt damit aus:

- $I_X(Y) = \rho(\rho^{-1}(I_X(Y))) = \rho(I(Y))$
- Die Abbildung
  $$\{\text{Ideale von } k[X]\} \longrightarrow \{\text{Ideale } I \text{ mit } I(X) \subseteq I \subseteq k[T]\},\ I \mapsto \rho^{-1}(I),$$
  ist bijektiv (mit der Inversen $I \mapsto I/I(X)$).
- I ist radikel $\Leftrightarrow \rho^{-1}(I)$ ist radikal.

[26] $\mathrm{Specm}(A) \longrightarrow \{\text{k-Algebra-Homomorphismen } A \longrightarrow k\},\ M \mapsto (A \longrightarrow A/M,\ a \mapsto a \bmod M)$

Man beachte $A/M \cong k[T]/(T_i - p_i \mid i = 1,..,n) \cong k$ und $k \longrightarrow A/M,\ c \mapsto c \bmod M$, erlaubt eine natürliche Identifikation der Abbildungen $A \longrightarrow A/M$ mit Abbildungen $A \longrightarrow k$. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\{\text{k-Algebra-Homomorphismen } A \longrightarrow k\} \longrightarrow \mathrm{Specm}(A),\ A \xrightarrow{\varphi} k \mapsto \ker(\varphi).$$

[27] X irreduzibel $\Leftrightarrow$ I(X) Primideal $\Leftrightarrow$ $k[X] = k[T]/I(X)$ Integritätsbereich.

[28] Es gilt (vgl. Aufgabe 1.2.8(2)):

$$X \text{ unzusammenhängend} \Leftrightarrow \text{Es gibt echte Ideale } I', I'' \text{ mit } I' \cap I'' = 0 \text{ und } I' + I'' = k[X]$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann man schreiben $1 = a' + a''$ mit $a' \in I'$ und $a'' \in I''$, also

$$1 = 1^2 = a'^2 + a''^2 + 2a'a''.$$

Wegen $I'I'' \subseteq I' \cap I'' = 0$ ist $2a'a'' = 0$, also

$$1 = a'^2 + a''^2$$

also

(5)[29] Seien $X_1, \dots, X_s$ die irreduziblen Komponenten von X. Sind die X_i paarweise disjunkt, d.h. $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so ist die Abbildung

---

$$0 = a'^2 - a' + a''^2 - a''$$

also

$$a'^2 - a' = -(a''^2 - a'') \in I' \cap I'' = 0$$

also

$$a'^2 = a' \text{ und } a''^2 - a''.$$

Damit sind a' und a" identpotent. Weil I' und I" echte Ideale sein sollen, sind a' und a" beide von 1 verschieden. Wegen a' + a" = 1 und beide von 1 verschieden, sind auch beide von 0 verschieden.
Damit ist bewiesen, daß es in k[X] - {0,1} idempotente Elemente gibt, falls X unzusammenhängend ist.

Sei umgekehrt $a \in A := k[X]$ mit $a^2 = a$ und a von 0 und 1 verschieden. Dann gilt

$$(1- a) = 1 + a^2 - 2a = 1- a,$$

d.h. auch 1-a ist idempotent und von 0 und 1 verschieden. Sei

$$A' := A \bullet a \text{ und } A'' := A \bullet (1-a).$$

Dann sind A' und A" beide k-Algebren (mit den Einselementen a' := a bzw. a" := 1-a. Betrachten wir die Abbildung

$$A \longrightarrow A' \times A'', x \mapsto (xa', xa'').$$

Dies ist ein Homomorphismus von k-Algebren. Dieser Homomorphismus ist injektiv: liegt x im Kern, so gilt xa' = 0 = xa", also

$$x = x \bullet 1 = xa' + xa'' = 0 + 0 = 0.$$

Dieser Homomorphismus ist surjektiv: sei (xa', ya") vorgegben. Mit z = xa' + ya" gilt (wegen a'a" = 0)

$$za' = xa'a' + ya''a' = xa'$$
$$za'' = xa'a'' + ya''a'' = ya''$$

Das Bild von z in A'×A" ist also das vorgegebene Element (xa', ya").

Sei

$$I' := \ker(A \longrightarrow A', x \mapsto xa') \text{ und}$$
$$I'' := \ker(A \longrightarrow A'', x \mapsto xa'').$$

Man beachte, wegen $A' = Aa \subseteq A$ und $A'' = Ab \subseteq A$ sind A' und A" reduziert, also I' und I" radikale Ideale. d.h.

$$A' = A/I' = k[X'] \text{ mit } X' = V(I') \text{ und}$$
$$A'' = A/I'' = k[X''] \text{ mit } X'' = V(I'').$$

Die Surjektionen $A \longrightarrow A'$ und $A \longrightarrow A''$ sind gerade die Einchränkungsabbildungen auf X' bzw. X".
Es gilt

$$I' \cap I'' = 0$$

(weil $A \longrightarrow A' \times A''$ injektiv ist). Wegen $a'' \in I'$ und $a' \in I''$ gilt

$$I' + I'' = A.$$

Beide Ideale sind echt, weil A' und A" von 0 verschieden sind. Damit ist

$$X = V(0) = V(I' \cap I'') = V(I') \cup V(I'')$$
$$V(I') \cap V(I'') = V(I'+I'') = V(A) = \emptyset.$$

Weil I' und I" echte Ideale sind, sind V(I') uund V(I") nicht leer. Deshalb ist X unzusammenhängend.

[29] Die Abbildung ist injektiv: liegt f im Kern, so ist $f|_{X_i} = 0$ für jedes i, also f = 0 auf

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_s.$$

$$k[X] \longrightarrow k[X_1] \times ... \times k[X_s],\ f \mapsto (f|_{X_1},..., f|_{X_s})$$

ein Isomorphismus von k-Algebren. Summe und Produkt auf der k-Algebra rechts seien koordinatenweise definiert..

1.3.5 Offene Hauptmengen

Sei $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Bisher haben wir nur Funktionen betrachtet, die auf ganz X definiert sind. Wir werden jedoch auch Funktionen betrachten müssen, die nur auf offenen Teilmengen definiert sind. In diesem Kontext (und in anderen Zusammenhängen) spielen die folgenden offenen Mengen eine Rolle.

Für jedes $f \in k[X]$ sei

$$D(f) := D_X(f) := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

Die Mengen dieser Gestalt werden <u>offene Hauptmengen</u> von X genannt.

Bemerkungen

(i) Offene Hauptmengen sind tatsächlich offen:

$$D(f) = X - V_X(f).$$

(ii) Für jedes $f \in k[X]$ gilt

$$D(f^n) = D(f)$$

für $n = 1,2,3,...$

(iii) Für je zwei Funktionen $f, g \in k[X]$ gilt

$$D(fg) = D(f) \cap D(g).$$

1.3.6 Eigenschaften offener Hauptmengen

Sei X eine algebraische Menge.

(i) Für Elemente $f, g \in k[X]$ sind folgende Aussagen äquivalen.

(a) $D(f) \subseteq D(g)$.

(b) Es gibt eine natürlichen Zahl j mit $f^j \in g \cdot k[X]$.

(ii) Die offenen Hauptmengen bilden eine Topologie-Basis der Zariski-Topologie, d.h. für jede offene Menge $U \subseteq X$ und jeden Punkt $x \in U$ gibt es eine offene Hauptmenge D mit

$$x \in D \subseteq U. \tag{1}$$

Insbesondere ist jede offene Menge von X Vereinigung von offenen Hauptmengen.

Beweis. <u>Zu</u> (i). (a) $\Rightarrow$ (b). Mit $D(f) \subseteq D(g)$ gilt $V(g) \subseteq V(f)$ und mit 1.1.4 (3) auch

---

<u>Die Abbildung ist surjektiv</u>: Der Fall s = 1 ist trivial. Der Fall s = 2 wurde bereits in Aufgabe (4)(b) behandelt. Induktionsschritt: Sei $X' = X_2 \cup ... \cup X_s$. Zur Zerlegung $X = X_1 \cup X'$ existiert nach (4)(b) ein Isomorphismus

$$k[X] \xrightarrow{\cong} k[X_1] \times k[X'],\ f \mapsto (f|_{X_1}, f|_{X'}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung hat man

$$k[X'] \cong k[X_2] \times ... \times k[X_s].$$

Zusammen erhält man die Behauptung.

$$f \in \sqrt{f\bullet k[X]} \subseteq \sqrt{g\bullet k[X]},$$

also liegt eine Potenz von f in $g\bullet k[X]$.

Zu (i). (b) $\Rightarrow$ (a). Mit $f^j \in g\bullet k[X]$ gilt

$$V(g) \subseteq V(f^j) = V(f),$$

also $D(f) \subseteq D(g)$.

Zu (ii). Weil U offen ist, gibt es ein Ideal $I \subseteq k[X]$ mit

$$U = X - V(I).$$

Wegen $x \in U$ liegt x nicht in V(I), d.h. es gibt ein $f \in I$ mit $f(x) \neq 0$. Wegen $f \in I$ gilt

$$V(I) \subseteq V(f),$$

also ist

$$x \in D(f) = X - V(f) \subseteq X - V(I) = U.$$

QED.

1.3.7 Definitionskörper und F-Strukturen

1.3.7 A Definitionskörper

Sei $F \subseteq k$ ein Teilkörper des Körpers k. Dann heißt F Definitionskörper einer abgeschlossenen Menge $X \subseteq k^n$, wenn das Ideal I(X) von Polynomen mit Koeffizienten aus F erzeugt wird.[30] Die F-Algebra

$$F[X] := F[T]/I(X)\cap F[T]$$

heißt dann Koordinatenring von X über F.

Bemerkungen

Sei F ein Definitionskörper der abgeschlossenen Menge $X \subseteq k^n$.

(i) Die Zusammensetzung

$$h: F[T] \hookrightarrow k[T] \longrightarrow k[X],\ f \mapsto f \mapsto f|_X ,$$

der natürlichen Einbettung von F[T] in k[T] mit der Einschränkungsabbildung auf X induziert einen Isomorphismus

$$F[X] \longrightarrow \mathrm{Im}(h) = \{\text{Einschränkungen der } f \in F[T] \text{ auf } X\}.$$

(ii) Wir setzen

$$I_F(X) := I(X)\cap F[T]$$

und betrachten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I(X) & \longrightarrow & k[T] & \longrightarrow & k[X] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & I_F(X) & \longrightarrow & F[T] & \longrightarrow & F[X] & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

---

[30] Eine etwas näher liegende Definition würde nur fordern, daß es eine Menge $M \subseteq F[T]$ von Polynomen mit Koeffizienten aus F gibt mit $X = V(F)$. Es gäbe dann sehr viel mehr Definitionskörper, aber wir wären gezwungen, uns mit affinen Koordinatenringen zu beschäftigen, welche nilpotente Elemente enthalten.

Die rechte obere Abbildung ist dabei ein Homomorphismus von k-Algebren, die rechte untere ein Homomorphismus von F-Algbren. Die vertikalen Abbildungen in der Mitte und rechts sind Homomorphismen von F-Algebren.

Wir tensorieren die untere Zeile mit k über F und erhalten ein kommutatives Diagramm, welches ebenfalls exakte Zeilen besitzt.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I(X) & \longrightarrow & k[T] & \longrightarrow & k[X] & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow\alpha & & \uparrow\beta & & \uparrow\gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & k\otimes_F I_F(X) & \longrightarrow & k\otimes_F F[T] & \longrightarrow & k\otimes_F F[X] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die Vertikalen Abbildungen sind dabei bijektiv.

Beweis. Zu (i). Der F-Algebra-Homomorphismus h hat als Kern gerade den Durchschnitt $I(X)\cap F[T]$. Die Aussage folgt aus dem Homomorphie-Satz.

Zu (ii). Der Homomorphismus β in der Mitte ist ein Isomorphismus. Der Polynomring F[T] ist besitzt als F-Vektorraum die Potenzprodukte der

$$T_1,\dots,T_n$$

als Basis. Deshalb besitzt $k\otimes_F F[X]$ als k-Vektorraum dieselben Potenzprodukte[31] als Basis. Auch k[T] besitzt diese als Basis über k. Die Abbildung β ist aber k-linear und überführt jedes dieser Potenzprodukte in sich, bildet also eine Basis in eine Basis ab, und ist deshalb bijektiv.

Der Homomorphismus α links ist ein Isomorphismus. Als Einschränkung des Isomorphismus β auf $I_F(X)$ ist α injektiv. Der Isomorphismus β bildet Ideale in Ideale ab. Das Bild von $I_F(X)$ ist deshalb ein in I(X) enthaltenes Ideal, welches ein Erzeugendensystem von I(X) enthält[32], d.h. es ist gleich I(X).

Der Homomorphismus γ rechts ist ein Isomorphismus. Das folgt aus der Exaktheit der Zeilen und der Bijektivität von α und β. Explizit: liegt x im Kern von γ, so besitzt x ein Urbild y im Definitionsbereicht von β, welches von β in das Ideal I(X) abgebildet wird. Deshalb liegt y im Definitionsbereich von α. Sei Bild x ist dann aber gleich Null. Wir haben gezeigt, γ ist injektiv.

Sei jetzt z aus k[X]. Wegen der Exaktheit der oberen Zeile gibt es ein Urbild in k[T]. Weil β bijektiv ist, gibt sogar ein Urbild w in $k\otimes_F F[T]$. Das Bild dieses Urbilds w im Definitionsbereich von γ wird nach Konstruktion durch γ in z abgebildet. Wir haben gezeigt, γ ist surjektiv.

QED.

1.3.7 B F-Strukturen

Seien A eine affine k-Algbra und $F \subseteq k$ ein Teilkörper. Eine F-Struktur auf A ist eine endlich erzeugte F-Teilalgebra $A_F \subseteq A$ mit der Eigenschaft, daß der induzierte k-Algebra-Homomorphismus

$$k\otimes_F A_F \longrightarrow A,\ c\otimes f \mapsto c\bullet f,$$

---

[31] Genauer: die Elemente der Gestalt $1\otimes\mu$, μ ein Potenzprodukt der $T_1,\dots,T_n$.

[32] denn F soll ein Definitionskörper von X sein.

ein Isomorphismus ist. Ist

$$X \subseteq k^n$$

eine abgeschlossene Teilmenge und $A = k[X]$, so heißt A_F auch F-Struktur auf X und wird mit

$$F[X]$$

bezeichnet. Wir werden manchmal auch vom Koordinaten-Ring von X über F sprechen, wenn klar ist welche F-Struktur von X gemeint ist. Die Menge

$$X(F) := \{ \text{F-Algebra-Homomorphismen } F[X] \longrightarrow F \}$$

heißt Menge der F-rationalen Punkte von X (bezüglich der gegebenen F-Struktur von k[X]).

Sei allgemeiner V ein k-Vektorraum (der nicht endlich-dimensional zu sein braucht). Eine F-Struktur von V ist ein F-linearer Unterraum $V_F \subseteq V$ mit der Eigenschaft, daß die induzierte k-lineare Abbildung

$$k \otimes_F V_F \longrightarrow V$$

ein Isomorphismus ist.

Sei jetzt V ein k-Vektorraum mit F-Struktur V_F. Man sagt dann, ein k-linearer Unterraum $V' \subseteq V$ ist definiert über F, wenn der Durchschnitt $V' \cap V_F$ den Unterraum V' über k erzeugt.

Bemerkungen

(i) Sei $F \subseteq X$ ein Definitionskörper von X und

$$A_F = F[X] = F[T]/I(X) \cap F[T]$$

die in 1.3.7 beschriebene F-Struktur von k[X]. Dann kann man die Menge

$$X(F) := \mathrm{Hom}_{F\text{-}Alg}(F[X], F)$$

der F-rationalen Punkte von X identifizieren mit der Menge der Punkte von $X \subseteq k^n$, deren Koordinaten in F liegen: die Abbildung

$$F^n \cap X \longrightarrow X(F),\ p \mapsto (f \mapsto f(p)),$$

ist bijektiv.

(ii) Ist A_F eine beliebige F-Struktur von X, so kann man X in solcher Weise in einen k^m einbetten, sagen wir

$$X \xrightarrow{\cong} Y \subseteq k^m,$$

daß F ein Definitionskörper der algebraischen Menge Y ist, für den die in 1.3.7 konstruierte F-Struktur gleich A_F ist. Insbesondere ist die Abbildng von (i),

$$F^m \cap Y \longrightarrow Y(F),\ p \mapsto (f \mapsto f(p))$$

bijektiv.

(iii) Seien V ein k-Vektorraum mit F-Struktur V_F und $V' \subseteq V$ ein k-linearer Unterraum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(a) V' ist definiert über F.

(b) $V' \cap V_F$ ist eine F-Struktur von V'.

(iv) Seien V ein k-Vektorraum mit F-Struktur V_F und $\{v_i\}_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von V über k, dessen Elementen in V_F liegen, d.h.

$$V = \sum_{i\in I} k\bullet v_i \text{ und } v_i \in V_F \text{ für jedes i.}$$

Dann ist $\{v_i\}_{i\in I}$ auch ein Erzeugendensystem von V_F über F,

$$V_F = \sum_{i\in I} F\bullet v_i$$

(v) Seien V'_F und V''_F zwei F-Strukturen des k-Vektorraums V mit $V'_F \subseteq V''_F$. Dann gilt

$$V'_F = V''_F$$

(vi) Sei V_F eine F-Struktur des k-Vektorraums V und f: $V \longrightarrow W$ ein k-linearer Isomorphismus. Dann ist $f(V_F)$ eine F-Struktur von W.

(vii) Seien V und W zwei k-Vektorräume mit den F-Strukturen V_F bzw. W_F. Dann ist

$$V_F \otimes_F W_F$$

eine F-Struktur von $V\otimes_k W$.

Beweis.<u>Zu</u> (i). 1.<u>Schritt</u>: der Fall F = k.

Nach der Bemerkung 1.3.2 definiert jedeer Punkt $p\in X$ einen k-Algbra-Homomorphismus

$$k[X] \longrightarrow k, f \mapsto f(p),$$

dessen Kern das maximale Ideal M_p der in p verschwindenden Funktionen von k[X] ist. Umgekehrt ist der Kern jedes k-Algebra-Homomophismus

$$\varphi: k[X] \longrightarrow k$$

ein Ideal M = ker(φ), dessen Restklassenring ein Körper $k[X]/M \cong k$ ist, d.h. ein maximales Ideal von k[X], also nach 1.3.3 (i) von der Gestalt

$$M = M_p \text{ mit } p \in X.$$

Die Abbildung

$$\psi: X \longrightarrow X(k) = \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X], k),\ p \mapsto (f \mapsto f(p)),$$

ist somit surjektiv. Sie ist injektiv, denn für je zwei verschiedene Punkte $p, q\in X$ gibt es ein i mit der Eigenschaft, daß die i-ten Koordinaten von p und q verschieden sind,

$$x_i(p) \neq x_i(q),\ x_i := T_i|X.$$

Also ist

$$\psi(p)(x_i) = x_i(p) \neq x_i(q) = \psi(q)(x_i)$$

also

$$\psi(p) \neq \psi(q).$$

2. <u>Schritt</u>. der allgemeine Fall.

Sei $p \in X$ ein Punkt mit Koordinaten aus F. Jedes $f \in F[X] = F[T]/I(X)\cap F[T]$ ist dann die Einschränkung

$$f = \tilde{f}|_X$$

eines Polynoms $\tilde{f}$ mit Koeffizienten aus F. Insbesondere gilt $f(p) = \tilde{f}(p) \in F$. Damit ist die Abbildung

$$F^n \cap X \longrightarrow X(F),\ f \mapsto (p \mapsto f(p)),$$

wohldefiniert. Als Einschränkung der bijektiven Abbildung ψ des ersten Schritts ist sie injektiv.
Wir haben noch die Surjektivität der Abbildung zu beweisen. Sei also ein Element von X(F) vorgegeben, sagen wir der F-Algebra-Homomorphismus

$$\alpha: F[X] \longrightarrow F.$$

Durch α ist ein kommutatives Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccc} k[X] & \xrightarrow{\gamma} & k \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ F[X]\otimes_F k & \xrightarrow{\beta} & F\otimes_F k \\ \cup & & \cup \\ F[X] & \xrightarrow{\alpha} & F \end{array}$$

Dabei sei β die Abbildung $\alpha\otimes 1$. Dies ist ein k-Algebra-Homomorphismus. Weil die oberen vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind, gibt es damit einen k-Algebra-Homomorphismus γ, für den das obere Viereck kommutativ ist. Weil k algebraisch abgeschlossen ist, ist der Kern von γ von der Gestalt M_p mit

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix} \in X \subseteq k^n,$$

und γ ist die Abbildung mit $\gamma(f) = f(p)$ für jedes $f \in k[X]$. Nun ist aber α gerade die Einschränkung von γ auf F[X], d.h. es gilt auch

$$\alpha(f) = \gamma(f) = f(p) \text{ für } f \in F[X] \subseteq k[X].$$

Insbesondere gilt für die Einschränkungen $x_i := T_i|_X$ der Koordinatenfunktionen

$$\alpha(x_i) = x_i(p) = T_i(p) = p_i.$$

Weil die Werte von α in F liegen, gilt $p_i \in F$ für jedes i, d.h. die Koordinaten von p liegen in F. Wir haben gezeigt, die F-rationalen Punkte von X entsprechend der obigen Definition sind Punkte von X, deren Koordinaten in F liegen.
Zu (ii). Die vorgegebene F-Struktur von X ist nach Definition eine endlich erzeugte F-Teilalgebra, sagen wir

$$A_F = F[y_1,\dots,y_n] = F[U]/I \subseteq k[X]$$

mit Unbestimmten $U = U_1,\dots,U_m$, einem Ideal $I \subseteq F[U]$ und $y_i := U_i \bmod I$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow F[U] \longrightarrow A_F \longrightarrow 0$$

erhalten wir durch Anwenden des Funktors $k\otimes_F$ die Exaktheit der Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & k\otimes_F I & \longrightarrow & k\otimes_F F[U] & \xrightarrow{\alpha} & k\otimes_F A_F & \longrightarrow 0 \\ & & & \beta\downarrow\cong & & \gamma\downarrow\cong & \\ & & & k[U] & & k[X] & \end{array}$$

Der Isomorphismus

$$\beta: k\otimes_F F[U] \longrightarrow k[U],\ c\otimes f \mapsto f,$$

besteht, weil $\otimes$ mit direkten Summen kommutiert und $k\otimes_F F \cong k$ gilt. Der Isomorphismus

$$\gamma: k\otimes_F A_F \longrightarrow k[X]\ ,\ c\otimes f \mapsto f,$$

besteht, weil A_F eine F-Strutur von X ist. Wenn wir diese Isomorphismen verwenden, um die jeweiligen Definitionsbereiche mit dem zugehörigen Bildern zu identifizieren, so erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow k\otimes_F I \longrightarrow k[U] \xrightarrow{\delta} k[X] \longrightarrow 0$$

mit

$$\begin{aligned} \delta(U_i) &= \gamma(\alpha(\beta^{-1}(U_i))) \\ &= \gamma(\alpha(1\otimes U_i)) \\ &= \gamma(1\otimes y_i) \\ &= y_i \end{aligned}$$

Wegen der Surjektivität von δ wird $k[X]$ von den $y_i\in F[X]$ über k erzeugt. Sie definieren also eine Abbildung

$$y: X \longrightarrow k^m,\ p \mapsto \begin{pmatrix} y_1(p) \\ \dots \\ y_m(p) \end{pmatrix},$$

welche X mit einer algebraischen Menge $Y \subseteq k^m$ identifiziert (vgl. Bemerkung 1.3.1(iii)), und der Kern von δ ist gerade das Ideal dieser algebraische Menge

$$I(Y) = \mathrm{Ker}(\delta) = k\otimes_F I.$$

Wegen $I(Y) = k\otimes_F I$ wird das Ideal $I(Y)$ von Polynomen aus I erzeugt, d.h. von Polynomen aus $F[U]$. Deshalb ist F ein Definitionskörper von Y und

$$F[Y] := F[U]/I(Y)\cap F[U]$$

ist die zugehörige F-Struktur auf Y. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & I(Y) & \longrightarrow & k[U] & \xrightarrow{\delta} & k[X] & \longrightarrow 0 \\ & \cup & & \cup & & \cup & \\ 0 \longrightarrow & I & \longrightarrow & F[U] & \longrightarrow & A_F & \longrightarrow 0 \end{array}$$

aus dem wir ablesen:

$$I = \mathrm{Ker}(\delta|_{F[U]}) = \mathrm{Ker}(\delta) \cap F[U] = I(Y) \cap F[U]$$

also

$$A_F = F[U]/I = F[U]/\ I(Y) \cap F[U],$$

d.h. A_F ist die zum Definitionskörper F von Y in 1.3.7 konstruierte F-Struktur von Y.

Zu (iii). Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, hook] & V \\ V'\cap V_F \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & V' \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

erhält man durch Tensorieren der unteren Zeile mit k über F ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr, hook] & & V \\ k\otimes_F(V'\cap V_F) \arrow[u, hook] \arrow[rr, hook] & & k\otimes_F V_F \arrow[u, "\cong"] \end{tikzcd}$$

dessen rechte vertikale Abbilung ein Isomorphimus ist (weil V_F eine F-Strukur von V ist). Wegen der Kommutativität des Vierecks ist mit der rechten vertikalen Abbildung auch die linke vertikale Abbildung injektiv (weil die untere horizontale Abbildung es ist).

(a) $\Rightarrow$ (b). Nach Voraussetzung wird V' von $V'\cap V_F$ als k-Vektorraum erzeugt. Damit ist die linke vertikale Abbildung auch surjektiv, also ein Isomorphismus. Das bedeutet aber, $V'\cap V_F$ ist eine F-Struktur von V'.

(b) $\Rightarrow$ (a). Nach Voraussetzung ist die linke vertikale Abbildung ein Isomorphismus, also insbesondere surjektiv. Dann wird aber V' von $V'\cap V_F$ als k-Vektorraum erzeugt, d.h. V' ist über F definiert.

Zu (iv). Wegen $v_i \in V_F$ für jedes i ist

$$W := \sum_{i\in I} F\bullet v_i$$

ein F-linearer Unterraum von V_F. Wir betrachten die exakte Sequenz von F-Vektorräumen und F-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V_F \longrightarrow V_F/W \longrightarrow 0.$$

Dabei sei $W \longrightarrow V_F$ die natürliche Einbettung von W in V_F. Durch Anwenden des Funktors $k\otimes_F$ erhalten eine exakte Sequenz von k-Vektorräumen und k-linearen Abbildungen

$$0 \longrightarrow k\otimes_F W \longrightarrow k\otimes_F V_F \longrightarrow k\otimes_F V_F/W \longrightarrow 0$$

Weil V_F eine F-Struktur von V ist, ist die natürliche Abbildung

$$k\otimes_F V_F \longrightarrow V,\ c\otimes v \mapsto c\bullet v,$$

ein Isomorphismus. Das Bild von $k\otimes_F W$ bei dieser Abbildung enthält das Erzeugendensystem $\{v_i\}_{i\in I}$ von V, d.h. das Bild von $k\otimes_F W$ ist der gesamte Raum V. Dann ist aber $k\otimes_F W \longrightarrow k\otimes_F V_F$ surjektiv. Auf Grund der Exakteheit der Sequenz folgt

$$k\otimes_F V_F/W = 0,$$

also

$$\dim_F V_F/W = \dim_k k\otimes_F V_F/W = 0,$$

also $V_F/W = 0$. Die natürliche Einbettung $W \longrightarrow V_F$ ist surjektiv, d.h.

$$V_F = W = \sum_{i\in I} F\bullet v_i \;.$$

<u>Zu (v)</u>. Sei $\{v_i\}_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von V über k, dessen Elemente in V'_F liegen. Dann liegen die v_i auch in V''_F, erzeugen also nach (iv) den F-Vektorraum V''_F. Dann gilt aber $V''_F \subseteq V'_F$, also $V''_F = V'_F$.

<u>Zu (vi)</u>. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ V_F \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_V:=f|V_F"] & f(V_F) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

faktorisieren sich die vertikalen natürlichen Einbettungen über die Tensorprodukte mit k über F von deren Definitionsbereichen. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f", "\cong"'] & W \\ k\otimes_F V_F \arrow[u, "\varphi_V", "\cong"'] \arrow[r, "k\otimes f_F", "\cong"'] & k\otimes_F f(V_F) \arrow[u, "\varphi_W"'] \\ V_F \arrow[u, hook] \arrow[r, "f|V_F", "\cong"'] & f(V_F) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Für $c \in k$ und $v \in V_F$ gilt

$$f(\varphi_V(c\otimes v)) = f(c\bullet v) = c\bullet f(v) = \varphi_W(c\otimes f(v)) = \varphi_W((id\otimes f_F)(c\otimes v)),$$

d.h. das obere Viereck ist kommutativ. Weil alle Abbildungen dieses Vierecks mit eventueller Ausnahme von φ_W Isomorphismen sind, ist auch φ_W ein Isomorphismus.

<u>Zu (vii)</u>. Es gilt

$$\begin{array}{lll} k\otimes_F(V_F\otimes_F W_F) & \cong (k\otimes_F V_F)\otimes_F W_F & \\ & \cong V\otimes_F W_F & (V_F \text{ ist eine F-Struktur von V}) \\ & \cong (V\otimes_k k)\otimes_F W_F & (V \text{ ist ein k-Vektorraum}) \\ & \cong V\otimes_k (k\otimes_F W_F) & \\ & \cong V\otimes_k W & (W_F \text{ ist eine F-Struktur von W}) \end{array}$$

Die Isomorphie wird realisiert durch die Abbildung

$$c\otimes(v\otimes w) \mapsto (c\otimes v)\otimes w \mapsto (c\bullet v)\otimes w \mapsto ((c\bullet v)\otimes 1)\otimes w = v\otimes(c\bullet 1)\otimes w \mapsto c\bullet(v\otimes w)$$

QED.

1.3.8 Die F-Topologie

Seien $F \subseteq k$ ein Teilkörper, X eine algebraische Menge und F[X] eine F-Struktur der k-Algebra k[X]. Eine abgeschlossene Menge $Y \subseteq X$ heißt F-abgeschlossen, wenn es ein über F definiertes Ideal $I \subseteq k[X]$ gibt

$$k\otimes_F (I\cap F[X]) \xrightarrow{\cong} I,$$

mit[33]

[33] Springer stellt in seinem Buch die strengere Forderung, daß das Ideal $I_X(Y)$ über F definiert sein soll. Das ist problematisch, denn dann bilden die F-offenen Mengen nicht notwendig (wie behauptet) eine Topologie: seien k ein Körper der Charakteristik 2 und $F \subset k$ ein echter Teilkörper, für welchen es ein Element $a \in k\text{-}F$ gibt mit $a^2 \in F$. Zum Beispiel sei

$$F = \mathbb{F}_2(x)$$

der rationale Funktionen-Körper des Körpers $\mathbb{F}_2$ aus zwei Elementen und k die algebraische Abschließung der rein inseparablen Erweiterung $F(\sqrt{x})$ von F. Die natürliche Einbettung von F in k definiert eine Einbettung der Polynom-Ringe

$$F[x, y] \subset k[x, y],$$

und F[x, y] ist eine F-Struktur von k[x, y]. Betrachten wir die Polynome

$$f := y + x^2 - a^2 \text{ und } g := y.$$

Sie liegen in F[x,y] und sind als lineare Polynome sowohl irreduzibel in F[x,y] als auch in k[x,y]. Sie erzeugen deshalb Primideale in beiden Ringen.
Mit

$$X := V(f) \text{ und } Y := V(g)$$

gilt

$$I(X) = f\bullet k[x,y] \text{ und } I(Y) = g\bullet k[x,y].$$

Außerdem ist

$$I(Y)\cap F[x, y] = g\bullet F[x,y], \tag{*}$$

denn ein Element der linken Seite hat als Polynom in y das Absolutglied 0, liegt also in der rechten Seite. Die Transformation

$$x \mapsto x, y \mapsto y + x^2 - a^2$$

definiert einen Automorphismus von k-Algebren auf k[x,y] und einen Automorphismus von F-Algebren auf F[x,y]. Durch Anwenden dieses Automorphismus auf (*) erhalten wir

$$I(X)\cap F[x, y] = f\bullet F[x,y], \tag{**}$$

Aus (*) und (**) lesen wir ab, daß die Ideale I(X) und I(Y) definiert sind über F, d.h. die Mengen X und Y sind F-abgeschlossen in k^n. Betrachten wir deren Durchschnitt.
Es gilt

$$X \cap Y = V(I(X)+I(Y)) = V(f, g) = V(y, x^2\text{-}a^2) = V(y, x\text{-}a).$$

Das letzte Gleichheitszeichen besteht, weil die Charakteristik von k gleich 2 ist, also $x^2\text{-}a^2 = (x\text{-}a)^2$ gilt. Weil das von y und x-a erzeugte Ideal maximal ist, also ein Primideal, also ein radikales Ideal, folgt

$$I(X\cap Y) = (y, x\text{-}a)\bullet k[x,y].$$

$$Y = V(I).$$

Eine Teilmenge von X heißt F-offen, wenn sie das Komplement einer F-abgeschlossenen Menge ist.

Bemerkungen

Sei $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge und F[X] eine F-Struktur von k[X].

(i) Die F-offenen Mengen definieren eine Topologie auf X, welche F-Topologie heißt.

(ii) Beispiel: Die offene Hauptmenge D(f) ist F-offen, wenn $f \in F[X]$ gilt.

(iii) Die F-offenen Hauptmengen bilden eine Topologie-Basis der F-Topologie.[34]

(iv) Jede F-offene Menge ist Vereinigung von endlich vielen F-offenen Hauptmengen.[35]

Beweis. Zu (i). (vgl. 1.1.2).

Schritt (a). X und $\varnothing$ sind F-abgeschlossen.

Es gilt $I_X(X) = \{0\}$. Dieses Ideal wird als k-Vektorraum von

$$I_X(X) \cap F[X] = \{0\}$$

erzeugt, d.h. $I_X(X)$ ist über F definiert, d.h. X ist F-abgeschlossen.

Weiter gilt $I_X(\varnothing) = k[X]$. Dieses Ideal wird als k-Vektorraum von

$$I_X(\varnothing) \cap F[X] = F[X]$$

erzeugt (weil $k\otimes_F F[X] \longrightarrow k[X]$ surjektiv ist)[36], d.h. $I_X(\varnothing)$ ist über F definiert, d.h. $\varnothing$ ist F-abgeschlossen.

Schritt (c). Mit $A, B \subseteq X$ ist auch $A \cup B$ F-abgeschlossene Teilmengen von X.

Nach Vorausetzung gibt es über F definierte Ideale I und J mit

$$A = V(I) \text{ und } B = V(J).$$

Nach der Bemerkung von 1.3.7 sind dann $I \cap F[X]$ und $J \cap F[X]$ F-Strukturen der Ideale I bzw. J, d.h. die Einschränkung des Isomorphismus

$$\varphi: k\otimes_F F[X] \longrightarrow k[X],\ c\otimes f \mapsto cf,$$

auf $J(A) := I \cap F[X]$ und $J(B) := J \cap F[X]$ induziert Isomorphismen

$$k\otimes_F J(A) \xrightarrow{\cong} I \text{ bzw. } k\otimes_F J(B) \xrightarrow{\cong} J,$$

Dieses Ideal wird nicht von Elementen aus F[x,y]: andernfalls würde $(x-a)\cdot k[x]$ von Elementen aus F[x] erzeugt (man gehe zu den Restklassen modulo y über oder setze y = 0). Weil F[x] ein Hauptidealring ist, würde folgen

$$(x-a)\cdot k[x] = h\cdot k[x] \text{ mit } h \in F[x].$$

Weil h ein Teiler von x-a ist, muß h linear in x sein, d.h. h = x-b mit $b \in F$. Außerdem gibt es ein Polynom in $\ell \in k[x]$ mit $x-a = \ell\cdot(x-b)$. Dieses Polynom ℓ muß den Grad 0 haben, also eine Konstante sein. Vergleich der höchsten Koeffizienten zeigt, $\ell = 1$, d.h. x-a = x-b, d.h. $a = b \in F$ im Widerspruch zur Wahl von a. Dieser Widerspruch zeigt, $I(X \cap Y) = (y, x-a)$ ist nicht über F definiert, d.h. $X \cap Y$ ist nicht F-abgeschlossen. Der Durchschnitt der beiden F-abgeschlossenen Mengen X und Y ist nicht F-abgeschlossen. Die F-abgeschlossenen Mengen sind somit nicht die abgeschlossenen Mengen eines topologischen Raums.

[34] Sogar die Mengen der Gestalt D(f) mit $f \in F[X]$.

[35] Sogar von Mengen der Gestalt D(f) mit $f \in F[X]$.

[36] es ist sogar ein Isomorphismus.

Im Tensorprodukt $k\otimes_F F[X]$ gilt

$$k\otimes_F(J(A)\cap J(B)) = k\otimes_F J(A)\cap k\otimes_F J(B)$$

also

$$\begin{aligned}\varphi(k\otimes_F(J(A)\cap J(B))) &= \varphi(k\otimes_F J(A)\cap k\otimes_F J(B))\\ &= \varphi(k\otimes_F J(A))\cap\varphi(k\otimes_F J(B)) && \text{(weil } \varphi \text{ bijektiv ist)}\\ &= I\cap J && \text{(siehe oben)}\end{aligned}$$

Das Ideal $I\cap J$ von $V(I\cap J) = V(I)\cup V(J) = A\cup B$ wird also als k-Vektorraum erzeugt von

$$J(A)\cap J(B) \qquad = I\cap J\cap F[X]$$

Wir haben gezeigt, $I\cap J$ ist definiert über F, d.h. $A\cup B$ ist F-abgeschlossen.
Schritt (d). Sei $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ eine Familie von F-offenen Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha$ F-offen in X.

Nach Voraussetzung (und der Bemerkung von 1.3.7) gibt es für jedes $\alpha\in A$ über F definierte Ideale

$$I_\alpha \subseteq k[X],\ I_\alpha\cap F[X] \text{ enthält eine k-Vektorraum-Basis von } I_\alpha$$

mit

$$V(I_\alpha) = X_\alpha \text{ für jedes } \alpha\in A.$$

Es folgt

$$\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha = \bigcap_{\alpha\in A} V(I_\alpha) = V(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha).$$

Außerdem gilt für jedes $\alpha\in A$

$$I_\alpha\cap F[X] \subseteq \sum_{\alpha\in A} I_\alpha \cap F[X] \subseteq \sum_{\alpha\in A} I_\alpha$$

Für jedes $\alpha\in I$ enthält die Menge links eine k-Vektorraum-Basis von I_α. Dasselbe gilt deshalb auch für die Menge in der Mitte. Der von dieser Menge in der Mitte erzeugte k-Vektorraum enthält also I_α. Da dies für jedes $\alpha\in A$ gilt, enthält er auch $\sum_{\alpha\in A} I_\alpha$. Damit ist $\sum_{\alpha\in A} I_\alpha$ über F-definiert, d.h.

$$\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha = V(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha).$$

ist F-abgeschlossen.
Zu (ii). Wegen $f \in F[X]$ ist $f\bullet F[X]$ ein Ideal von F[X] welches das Polynom f enthält. Dann ist aber der von $f\bullet F[X]$ erzeugte k-Vektorraum ein Ideal von k[X], welches das

Element f enthält und in $f\bullet k[X]$ enhalten ist. Deshalb ist der von $f\bullet F[X]$ erzeugte k-Vektorraum gleich $f\bullet k[X]$.[37] Wir haben gezeigt,

$f\bullet k[X]$ ist definiert über F.

Damit ist V(f) F-abgeschlossen, also D(f) = X - V(f) F-offen.

Zu (iii) und (iv). Es reicht, (iv) zu beweisen. Sei $U \subseteq X$ eine F-offene Menge. Dann ist X-U F-abgeschlossen, also von der Gestalt

$$X\text{-}U = V(f_1,...,f_r) \text{ mit } f_i \in F[X]$$

für jedes i. Dann gilt aber

$$X - U = V(f_1) \cap ... \cap V(f_r)$$

also

$$\begin{aligned} U &= X - (X\text{-}U) \\ &= X - V(f_1) \cap ... \cap V(f_r) \\ &= (X - V(f_1)) \cup ... \cup (X\text{-}V(f_r)) \\ &= D(f_1) \cup ... \cup D(f_r). \end{aligned}$$

Die Hauptmengen $D(f_i)$ sind wegen $f_i \in F[X]$ nach (ii) F-offen.

QED.

1.3.9 Aufgabe

Seien $k = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$ und $k[X] = k[T, U]/(T^2+U^2 - 1)$. Wir bezeichnen mit t und u die Einschränkungen von T bzw. U auf X. Zeigen sie,

$$\mathbb{R}[t, u] \text{ und } \mathbb{R}[ia, ib]$$

sind unterschiedliche $\mathbb{R}$-Strukturen von X. Hinweis: man betrachte die Mengen der rationalen Punkte).

Beschreibung der Situation

Für jede reelle Zahl φ liegt $T^2+U^2 - 1$ im Kern der Abbildung

$$k[T, U] \longrightarrow k, f(T, U) \mapsto f(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Deshalb induziert diese einen Homomorphismus von k-Algebren

$$k[X] = k[T,U]/(T^2+U^2 - 1) \longrightarrow k, \text{ Restklasse von } f \mapsto f(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Für Polynome mit reellen Koeffizienten erhalten wir dabei Bilder, die in $\mathbb{R}$ liegen. Die Einchränkung auf $\mathbb{R}[T,U]/I(X)\cap\mathbb{R}[T,U]$ ist somit ein $\mathbb{R}$-rationaler Punkt. Wir erhalten so für jedes $\varphi\in\mathbb{R}$ einen $\mathbb{R}$-rationalen Punkt.

Sei jetzt ein $\mathbb{R}$-rationaler Punkt

$$\mathbb{R}[iT,iU]/I(X)\cap\mathbb{R}[iT,iU] \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Wir wenden den Automorphismus von k[T, U] an mit $T \mapsto iT$ und $U \mapsto iU$ und erhalten so einen $\mathbb{R}$-Algebra-Homomorphismus

$$\mathbb{R}[T, U]/(T^2+U^2 + 1)\bullet\mathbb{C}[T,U]\cap\mathbb{R}[T,U] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Die Zusammensetzung

$$\mathbb{R}[T, U] \longrightarrow \mathbb{R}$$

---

[37] Alternative Argumentation: $f\bullet F[X]$ wird über F erzeugt von den Produkten der Gestalt

$$f\bullet\mu,$$

wobei μ die Einschränkungen auf X der Potenzprodukte der $T_1,...,T_n$ durchläuft. Über k erzeugen die $f\bullet\mu$ das Ideal $f\bullet k[X]$.

mit der natürlichen Surjekion auf den Faktorring ist ein $\mathbb{R}$-Algebra-Homomorphismus, welcher das Polynom $T^2+U^2 + 1$ in die Null abbildet. Dieses Polynom besitzt aber keine reellen Nullstellen, d.h. einen solchen $\mathbb{R}$-Algebra-Homomorphismus gibt es nicht. Die zweite $\mathbb{R}$-Struktur besitzt also keine rationalen Punkte, während die erste viele solche Punkte besitzt. Die beiden Strukturen müssen verschieden sein (sie sind nicht isomorph: sind α: $\mathbb{R}[t,u] \longrightarrow k[X]$ und β: $\mathbb{R}[it,iu] \longrightarrow k[X]$ die beiden natürlichen Einbettungen, so gibt es keinen $\mathbb{R}$-Algebra-Isomorphismus
γ: $\mathbb{R}[t,u] \longrightarrow \mathbb{R}[it,iu]$, für welchen des Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}[t,u] \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "a"'] & & \mathbb{R}[it,iu] \arrow[dl, "\beta"] \\ & \mathbb{C}[X] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.
Über den reellen Zahlen beschreibt die erste $\mathbb{R}$-Struktur den <u>Einheitskreis</u>,

$$X: T^2 + U^2 = 1,$$

und die zweite $\mathbb{R}$-Struktur die <u>leere Menge</u>,

$$Y: T^2 + U^2 = -1.$$

Über den komplexen Zahlen beschreiben beide Gleichungen die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, aus welcher zwei Punkte p_1, p_2 entfernt wurden. Fügt man die beiden fehlenden Punkte zu X hinzu, so kann man die Identifikation von X mit dem $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ durch die folgenden Abbildungen realisieren.

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightleftarrows}} X \cup \{ p_1, p_2 \} = \{[W,T,U] \mid T^2+U^2 = W^2 \} \subseteq \mathbb{P}^2_{\chi}$$

mit

$$\varphi([s,t]) := [t^2+s^2, t^2 - s^2, -2st]$$

$$\psi([W,T,U]) := \begin{cases} [W-T,-U] & \text{für } W \neq T \\ [-U, W+T] & \text{für } W \neq -T \end{cases}$$

Die Abbildung ψ ist wohldefiniert, denn für $W \neq \pm T$ gilt

$$\begin{aligned} [W-T, -U] &= [(W-T)\bullet(W+T), -U\bullet(W+T)] \\ &= [W^2-T^2, -U\bullet(W+T)] \\ &= [U^2, -U\bullet(W+T)] \qquad \text{(wegen } T^2+U^2 = W^2) \\ &= [U, -(W+T)] \\ &= [-U, W+T]. \end{aligned}$$

Die Abbildung φ ist wohldefiniert, d.h. das Bild von φ liegt tatsächlich in der Menge mit der Gleichung $T^2 + U^2 - W^2 = 0$:

$$\begin{aligned} &(t^2-s^2)^2 + (-2st)^2 - (t^2+s^2)^2 \\ &= t^4+s^4 - 2s^2t^2 + 4s^2t^2 - (t^2+s^2)^2 \\ &= t^4+s^4 + 2s^2t^2 - (t^2+s^2)^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die beiden Abbildungen sind invers zueinander:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi([s,t])) &= \psi([t^2+s^2, t^2 - s^2, -2st]) \\ &= [2s^2, 2st] \text{ bzw. } [2st, 2t^2] \end{aligned}$$

$= [s,t]$

$\varphi(\psi([W,T,U])) = \varphi([W-T,-U])$ bzw. $\varphi([-U, W+T])$

$= [U^2+(W-T)^2, U^2-(W-T)^2, 2(W-T)\cdot U]$

bzw. $[(W+T)^2+U^2, (W+T)^2-U^2, 2U\cdot(W+T)]$

$=$[38] $[W^2-T^2+(W-T)^2, W^2-T^2-(W-T)^2, 2(W-T)\cdot U]$

bzw. $[(W+T)^2+W^2-T^2, (W+T)^2-(W^2-T^2), 2U\cdot(W+T)]$

$=$[39] $[W+T+(W-T), W+T-(W-T), 2U]$

bzw. $[(W+T)+W-T, (W+T)-(W-T), 2U]$

$= [2W, 2T, 2U]$

$= [W,T,U]$.

1.4 Reguläre Funktionen und geometrische Räume[40]

1.4.1 Reguläre Funktionen auf algebraischen Mengen

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge, $x \in X$ ein Punkt und $U \subseteq X$ eine offene Umgebebung von x. Eine Funktion

$$f: U \longrightarrow k$$

heißt regulär im Punkt x, wenn es Funktionen $g, h \in k[X]$ und eine offene Umgebung V von x gibt, die ganz in U enthalten ist,

$$x \in V \subseteq U,$$

mit

$$f(x') = \frac{g(x')}{h(x')} \text{ und } h(x') \neq 0 \text{ für jedes } x' \in V.$$

Man sagt, die Funktion f ist regulär auf der Menge U, wenn sie regulär ist in allen Punkten von U. Die Menge der regulären Funktionen auf U wird mit

$$\mathcal{O}_X(U)$$

oder auch abkürzend mit

$$\mathcal{O}(U)$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) Produkt und Summe von zwei regulären Funktionen auf der offenen Menge U sind wieder reguläre Funktionen auf U. Die Elemente von k sind reguläre Funktionen auf U. Deshalb ist

$$\mathcal{O}_X(U)$$

eine k-Algebra.

(ii) Manchmal wird es bequem sein, wenn $\mathcal{O}_X(U)$ auch für die leere Menge U definiert ist. Wir vereinbaren deshalb, daß in diesem Fall die Menge

$$\mathcal{O}_X(\emptyset) = \{0\}$$

aus dem einzigen Element Null bestehen soll - auch wenn wir so keine k-Algebra erhalten wie im Fall der nicht-leeren Mengen U.

(iii) Sind U und V nicht-leere offene Teilmengen einer algebraischen Menge X mit

---

[38] es gilt $T^2+U^2 = W^2$, also $U^2 = W^2 - T^2$.

[39] der gemeinsame Faktor W-T bzw. W+T läßt sich kürzen.

[40] Im Englischen ‘ringed spaces’. Zur Bezeichnung ‘geometrischer Raum’ siehe Demazure, M., Gabriel, P.: Groupes algébriques, Masson & Cie, Paris 1970, Band I, Kapitel 1, §1, No.1, Definition 1.1.

$$U \subseteq V,$$

so definiert die Einschränkung auf U einen k-Algebra-Homomorphismus[41]

$$\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U),\ f \mapsto f|_U\ .$$

(iv) Seien $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge einer algebraischen Menge X und

$$U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$$

eine offene Überdeckung von U. Weiter sei für jedes $\alpha\in A$ eine reguläre Funktion

$$f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$$

derart gegeben, daß für je zwei Indizes $\alpha, \beta\in A$ gilt[42]

$$f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}.$$

Dann gibt es genau eine reguläre Funktion

$$f \in \mathcal{O}(U) \text{ mit } f|_{U_\alpha} = f_\alpha \text{ für jedes } \alpha\in A.$$

1.4.2 Garben von Funktionen

Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Wir nehmen an, für jede offene Menge

$$U \subseteq X$$

ist eine k-Algebra F(U) gegeben, die aus Funktionen $f: U \longrightarrow k$ besteht, wobei die Bedingungen (iii) und (iv) von Bemerkung 1.4.1 - die wir Garbenaxiome nennen wollen - erfüllt sind. Wir sagen dann, F ist eine Garbe von Funktionen mit Werten in k.

Ist $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge, so ist die in 1.4.1 defininierte Zuordnung

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$$

eine Garbe. Diese heißt die Garbe der regulären Funktionen auf X.

Ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einem topologischen Raum und einer Garbe von Funktionen mit Werten in k heißt geometrischer Raum über k. Die Garbe $\mathcal{O}$ heißt dann Strukturgarbe des geometrischen Raums.

Seien $(X, \mathcal{O})$ ein geometrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann definiert der geometrische Raum $(X, \mathcal{O})$ auf Y wie folgt die Struktur eines geometrischen Raums, der mit

$$(Y, \mathcal{O}|_Y)$$

bezeichnet wird und der induzierte geometrische Raum heißt. Die geometrischen Räume dieses Typs heißt auch geometrische Unterräume von X. Wir versehen Y mit der Unterraum-Topologie von X und haben noch die Garben $\mathcal{O}|_Y$ zu definieren. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ sei

---

[41] Im Fall $U = \emptyset$ vereinbaren wir $f|_U = 0$. Wir erhalten auf diese Weise zwar keinen k-Algebra-Homomorphismus, aber immerhin noch eine wohldefinierte Abbildung.

[42] Diese Bedingung ist automatisch erfüllt, wenn U_α und U_β disjunkte Mengen sind: beide Seite sind nach Definition gleich Null.

$$\mathcal{O}|_Y(U)$$

die Menge der Funktionen

$$f\colon U \longrightarrow k$$

mit der Eigenschaft, daß es eine Überdeckung von U gibt durch offene Teilmengen U_α von X, sagen wir

$$U \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha,$$

und Funktionen $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ mit

$$f|_{U\cap U_\alpha} = f_\alpha|_{U\cap U_\alpha}$$

für jedes $\alpha\in A$.

Aufgabe

$\mathcal{O}|_Y$ ist tatsächlich eine Garbe von Funktionen mit Werten in k.[43]

---

[43] Wir haben zu zeigen, daß die Bedingungen (ii) und (iii) von Bemerkung 1.4.1 erfüllt sind.

Zu Bedingung (ii).

Seien nicht-leere offene Teilmengen U und V von Y gegeben mit $U \subseteq V$ und sei

$$f \in \mathcal{O}|_Y(V).$$

Nach Voraussetzung gibt offene Teilmengen U_α von X, $\alpha\in A$ und Funktionen $f_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha)$ mit $f|_{V\cap U_\alpha} = f_\alpha|_{V\cap U_\alpha}$ für jedes $\alpha\in A$ und $V \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Wegen $U\subseteq V$ gilt dann erst recht

$$f|_{U\cap U_\alpha} = f_\alpha|_{U\cap U_\alpha} \text{ für jedes } \alpha\in A \text{ und } U \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha,$$

d.h. es ist

$$f|_U \in \mathcal{O}|_Y(U).$$

Damit ist die Einschränkung auf U,

$$\mathcal{O}|_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}|_Y(U),\ f \mapsto f|_U,$$

wohldefiniert (und ein k-Algebra-Homomorphismus).

Zu Bedingung (iii). Seien U eine offene Teilmenge von Y und

$$U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$$

eine Überdeckung von U durch offene Teilmengen U_α von Y. Für jedes $\alpha\in A$ sei eine Funktion

$$f_\alpha \in \mathcal{O}|_Y(U_\alpha)$$

gegeben. Es gelte

$$f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}.$$

für je zwei $\alpha, \beta\in A$. Auf Grund dieser Bedingungen gibt es genau eine Funktion $f\colon U \longrightarrow k$ mit $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$. Wir haben zu zeigen,

$$f \in \mathcal{O}|_Y(U).$$

Nach Definition von $\mathcal{O}|_Y$ gibt es für jedes $\alpha\in A$ eine Familie

$$\{V_{\alpha,i}\}_{i\in I_\alpha}$$

von offenen Teilmengen von X und für jedes $i\in I_\alpha$, $\alpha\in A$, eine Funktion

1.4.3 Affine algebraische Varietäten

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge und $\mathcal{O}_X$ die in 1.4.1 definierte Garbe der regulären Funktionen auf X. Dann ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geometrischer Raum. Die geometrischen Räume dieser Gestalt heißen <u>affine algebraische Varietäten</u> über k oder auch affine k-Varietäten. Im folgenden werden wir meistens die Garbe $\mathcal{O}_X$ weglassen und von X als einer affinen algebraische Varietät sprechen, wobei wir uns auf $\mathcal{O}_X$ beziehen werden als der <u>Strukturgarbe</u> von X.

$$f_{\alpha,i} \in \mathcal{O}(V_{\alpha,i})$$

mit $U_\alpha \subseteq \bigcup_{i\in I_\alpha} V_{\alpha,i}$ und

$$f_\alpha|_{U_\alpha \cap V_{\alpha,i}} = f_{\alpha,i}|_{U_\alpha \cap V_{\alpha,i}}$$

für beliebige $\alpha\in A$ und $i\in I_\alpha$.

Als offene Teilmenge von Y hat U_α die Gestalt $U_\alpha = Y \cap V_\alpha$ mit V_α offen in X. Wegen $U_\alpha \subseteq V_\alpha$ können wir die offenen Mengen $V_{\alpha,i}$ durch deren Durchschnitte mit V_α ersetzen, ohne daß eine der obigen Bedingungen, welche die $V_{\alpha,i}$ erfüllen sollen, verletzt wird. Wir können so erreichen, daß zusätzlich gilt

$$V_{\alpha,i} \subseteq V_\alpha$$

also

$$\begin{aligned} U\cap V_{\alpha,i} &= U\cap V_\alpha \cap V_{\alpha,i} && \text{(wegen } V_{\alpha,i} \subseteq V_\alpha) \\ &= U\cap Y\cap V_\alpha \cap V_{\alpha,i} && \text{(wegen } U \subseteq Y) \\ &= U\cap U_\alpha \cap V_{\alpha,i} && \text{(wegen } U_\alpha = Y\cap V_\alpha) \\ &= U_\alpha \cap V_{\alpha,i} && \text{(wegen } U = \textstyle\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha), \end{aligned}$$

d.h.

$$U\cap V_{\alpha,i} = U_\alpha \cap V_{\alpha,i} \text{ für jedes } \alpha\in A \text{ und jedes } i\in I_\alpha \qquad (*)$$

Weil die $V_{\alpha,i}$ für jedes feste α die Menge U_α überdecken, gilt

$$U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} \bigcup_{i\in I_\alpha} V_{\alpha,i}.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} f|_{U_\alpha \cap V_{\alpha,i}} &= (f|_{U_\alpha})|_{U_\alpha \cap V_{\alpha,i}} \\ &= f_\alpha|_{U_\alpha \cap V_{\alpha,i}} && \text{(nach Wahl von f)} \\ &= f_{\alpha,i}|_{U_\alpha \cap V_{\alpha,i}} && \text{(nach Wahl der } f_{\alpha,i}) \end{aligned}$$

für jedes $\alpha\in A$ und jedes $i\in I_\alpha$. Wegen (*) können wir in der obigen Rechnung $U_\alpha \cap V_{\alpha,i}$ durch $U\cap V_{\alpha,i}$ ersetzen:

$$f|_{U\cap V_{\alpha,i}} = f_{\alpha,i}|_{U\cap V_{\alpha,i}},\ f_{\alpha,i} \in \mathcal{O}(V_{\alpha,i}).$$

Da die $V_{\alpha,i}$ eine offene Überdeckung von U bilden, folgt

$$f \in \mathcal{O}|_Y(U).$$

Im Fall $X = k^n$ werden wir den zugehörigen geometrischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit

$$\mathbb{A}^n$$

bezeichnen und diesen den affinen n-dimensionalen Raum oder auch kürzer den affinen n-Raum nennen.

Bemerkungen

(i) Im folgenden werden wir sehr of zu einem gegeben Punkt $x \in X$ die in einer Umgebung von x regulären Funktionen zu betrachten haben, wobei wir zwischen zwei Funktionen, die in einer Umgebung von x gleich sind, keinen Unterschied machen werden.

(ii) Etwas formaler ausgedrückt werden wir Äquivalenzklassen von regulären Funktionen betrachten. Zwei in einer Umgebung von x reguläre Funktionen werden als äquivalent angesehen, wenn sie in einer Umgebung von x übereinstimmen. Eine solche Äquivalenzklasse heißt Keim im Punkt x. Zwei in einer Umgebung von x reguläre Funktionen haben denselben Keim, wenn sie in einer Umgebung von x übereinstimmen. Die Menge der Keime regulärer Funktionen auf X im Punkt x wird mit

$$\mathcal{O}_{X,x} \text{ oder auch } \mathcal{O}_x$$

bezeichnet. Der Keim einer in einer Umgebung von x regulären Funktion f wird meist mit

$$[f] \text{ oder } [f]_x$$

bezeichnet.

(iii) Sind f und g in einer Umgebung von $x \in X$ reguläre Funktionen, so hängen

$$[f+g] \text{ und } [f\bullet g]$$

nur von den Äquivalenz-Klassen von f und g ab. Die Definitionen

$[f] + [g] := [f+g]$

$[f]\bullet[g] := [f\bullet g]$

sind korrekt. Auf diese Weise wird $\mathcal{O}_{X,x}$ zu einer k-Algebra und für jede offene Umgebung $U \subseteq X$ von x wird die Abbildung

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x},\ f \mapsto [f],$$

zu einem Homomorphismus von k-Algebren.

(iv) Zwei reguläre Funktionen mit demselben Keim in x haben in x denselben Wert. Wir können deshalb diesen Wert, als Wert des Keims in x definieren, d.h. jedes Element $[f] \in \mathcal{O}_{X,x}$ hat in x einen wohldefinierten Wert

$$[f](x) := f(x).$$

Die Menge der Elemente von $\mathcal{O}_{X,x}$ mit dem Wert 0 wird mit

$$m_{X,x} := \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\}$$

bezeichnet. Diese Menge ist gerade der Kern des k-Algebra-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow k,\ f \mapsto f(x).$$

Dieser k-Algebra-Homomorphismus ist surjektiv, d.h. der Faktorring

$$\mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x} \cong k$$

ist ein Körper und $m_{X,x}$ ist ein maximales Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$.

(v) Sei f eine in einer Umgebung von x reguläre Funktion mit $f(x) \neq 0$, d.h.

$$[f] \in \mathcal{O}_{X,x} - m_{X,x}.$$

Dann ist die Funktion $\frac{1}{f}$ in einer Umgebung von x definiert und dort regulär. Es gilt

$$[f]\bullet[\tfrac{1}{f}] = [f\bullet\tfrac{1}{f}] = [1] = \text{Einselement von } \mathcal{O}_{X,x}.$$

Jedes Element von $\mathcal{O}_{X,x}$ - $m_{X,x}$ ist eine Einheit,

$$\mathcal{O}_{X,x} - m_{X,x} = \mathcal{O}^*_{X,x}$$

ist die Gruppe der Einheiten von $\mathcal{O}_{X,x}$. Insbesondere muß jedes echte Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ ganz in $m_{X,x}$ liegen, d.h.

$m_{X,x}$ ist das einzige maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$.

Kommutative Ringe mit 1, die genau ein maximales Ideal besitzen heißen <u>lokale Ringe</u>. Speziell $\mathcal{O}_{X,x}$ heißt <u>lokaler Ring</u> von X im Punkt x. Alternative Bezeichnung: $\mathcal{O}_{X,x}$ heißt <u>Halm</u> der Garbe $\mathcal{O}_X$ im Punkt x.

(vi) Bei der Untersuchung komplexer Mannigfaltigkeiten in einem gegebenen Punkt spielen die konvergenten Potenzreihen in diesem Punkt eine zentrale Rolle. Dieses Mittel steht bei der Untersuchung algebraischer Varietäten nicht zur Verfügung. Einen Ersatz dafür sind die Keime regulärer Funktionen.
Tatsächlich kann man die obigen Konstruktionen auch für die Garbe der holomorphen Funktionen auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X durchführen. Diese Garbe wird ebenfalls mit $\mathcal{O}_X$ bezeichnet ($\mathcal{O}$ steht für französich 'holomorph'). Der zugehörige Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ist isomorph zum Ring der in x konvergenten Potenzreihen.

(vii) Formal ist der Halm der Garbe $\mathcal{O}_X$ definiert als der direkte Limes über das direkte System der $\mathcal{O}_X(U)$ mit $x \in U$,

$$\mathcal{O}_{X,x} := \varinjlim_{x\in U} \mathcal{O}_X(U).$$

(viii) Sei ϕ: X $\longrightarrow$ Y eine reguläre Abbildung von algebraischen Mengen und $x \in X$ ein Punkt. Dann ist für jede auf einer offenen Umgebung von $\phi(x)$ reguläre Funktion, sagen wir

$$f: V \longrightarrow k \text{ regulär}, \phi(x) \in V \subseteq Y, V \text{ offen in } Y,$$

die Verpflanzung von f entlang ϕ eine reguläre Funktion

$$\phi^*(f): \phi^{-1}(V) \longrightarrow k \text{ mit } x \in \phi^{-1}(V) \subseteq X, \phi^{-1}(V) \text{ offen in } X.$$

Ist g eine reguläre Funktion mit demselben Keim wie f in $\phi(x)$, so ist $\phi^*(g)$ eine reguläre Funktion mit demselbem Keim wie $\phi^*(f)$ in x. Die Verflanzung entlang ϕ definiert deshalb eine Abbildung

$$\phi^*_x: \mathcal{O}_{Y,\phi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}, [f] \mapsto [f\circ\phi].$$

An der Abbildungsvorschrift erkennt man, daß es sich um einen Homomorphismus von k-Algebren handelt. Nach Konstruktioin ist für jede offene Umgebung $V \subseteq Y$ von $\phi(x)$ das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y(\phi^{-1}(V)) & \xrightarrow{\phi^*} & \mathcal{O}_X(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{Y,\phi(x)} & \xrightarrow{\phi_x^*} & \mathcal{O}_{X,x} \end{array}$$

Dabei sind die vertikalen Abbildungen gerade die k-Algebra-Homomorphismen von Bemerkung (iii), welche jede reguläre Funktion in deren Keim abbilden. Die Abbildung ϕ_x^* ist durch die Kommutativität dieser Diagramme eindeutig festgelegt (wenn V die offenen Umgebung von $\phi(x)$ durchläuft.

(ix) Die Bezeichnung lokaler Ring von X in x für $\mathcal{O}_{X,x}$ kommt von der Tatsache, daß für jede offene Umgebung $U \subseteq X$ von x die natürliche Einbettung $i:U \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus

$$i_x^*:\mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U,x},\ [W \xrightarrow{f} k] \mapsto [i^{-1}(W) \xrightarrow{i} W \xrightarrow{f} k]$$

von k-Algebren induziert:

Liegt nämlich der Keim von $W \xrightarrow{f} k$ im Kern von i_x^* (mit $W \subseteq X$ offene Umgebung von x), so ist

$$i_x^*([f]) = [f|_{W\cap U}] = 0,$$

d.h. auf einer offenen Umgebung von x, die ganz in $W\cap U$ liegt, ist $f|_{W\cap U}$ identisch Null. Dann ist aber auch der Keim

$$[f] \in \mathcal{O}_{X,x}$$

gleich Null. Wir haben gezeigt,

$$i_x^* \text{ ist injektiv.}$$

Jedes Element von $\mathcal{O}_{U,x}$ wird repräsentiert durch eine reguläre Funktion

$$g: U' \longrightarrow k$$

die auf einer offenen Umgebung $U' \subseteq U$ von x definiert ist. Da U' auch offen in X ist, repräsentiert diese Funktion auch ein Element

$$[g] \in \mathcal{O}_{X,x}.$$

Wegen $U' \subseteq U$ ist $g|_{U'\cap U} = g$, also

$$i_x^*([g]) = [g] \in \mathcal{O}_{U,x}.$$

Wir haben gezeigt, i_x^* ist auch surjektiv.

1.4.4 Aufgabe

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge, $p\in X$ ein Punkt und $M_p \subseteq k[X]$ das Ideal der Funktionen von k[X] mit einer Nullstelle in p. Zeigen Sie, es gibt einen Isomoprhismus von lokalen Ringen

$$\mathcal{O}_{X,p} \cong k[X]_{M_p} = \{\frac{f}{g} \mid f,g \in k[X] \text{ und } g \notin M_p\}.$$

<u>Hinweis 1</u>. Ist A ein kommutativer Ring mit 1 und $S \subseteq A$ eine Teilmenge, die abgeschlossen ist unter Multiplikation, so ist der <u>Quotientenring</u>

$$S^{-1}A := \{\frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S\}$$

definiert als die Menge der Äquivalenzklassen $\frac{a}{s}$ von S×A bezüglich der Äquivalenz-Relation

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow \text{es gibt ein } t \in S \text{ mit } t\bullet(s'a - sa') = 0.$$

$S^{-1}A$ ist ein kommutativer Ring mit 1 bezüglich der Operationen

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} := \frac{s'a + sa'}{ss'} \text{ und } \frac{a}{s}\bullet\frac{a'}{s'} := \frac{aa'}{ss'}$$

wobei $\frac{s}{s}$ mit $s \in S$ gerade das Einselement ist.

Ist $S \subseteq A$ die Teilmenge der Nicht-Nullteiler von A, so schreibt man auch

$$\mathbf{Q}(A) := S^{-1}A$$

und nennt **Q**(A) den <u>vollen Quotientenring</u> von A. Ist außerdem A ein Integritätsbereich, so ist Q(A) ein Körper und heißt <u>Quotientenkörper</u> von A.

<u>Hinweis 2</u>. Der Ring $S^{-1}A$ läßt sich durch folgende Universalitätseigenschaft charakterisieren.

(i) Die Abbildung $\varphi: A \longrightarrow S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{as}{s}$, ist unabhängig von der speziellen Wahl von $s \in S$ und ein Homomorphismus von Ringen mit 1, welcher die Elemente von S in Einheiten abbildet.

(ii) Die Abbildung φ von (i) ist universell bezüglich der in (i) beschriebenen Eigenschaft, d.h. für jeden Homomorphismus

$$\psi: A \longrightarrow B$$

von Ringen mit 1, welcher die Elemente von S in Einheiten abbildet, gibt es genau einen Homomorphismus $\tilde{\psi}: S^{-1}A \longrightarrow B$, für welchen folgendes Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, "\tilde{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Hinweis 3</u>.

Für jedes Primideal $P \subseteq A$ ist $S := A - P$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge, und man setzt

$$A_P := S^{-1}A.$$

Dieser Ring heißt <u>Lokalisierung</u> von A in P.
(siehe H. Matsumura, Commutative ring theory, Kapitel 2, Abschnitt 4 oder S. Lang, Algebra, Kapitel II, §3).

Zum ersten Hinweis. $\sim$ <u>ist eine Äquivalenz-Relation</u>.

Reflexivität: $(a, s) \sim (a, s)$, denn $t\bullet(sa - sa) = 0$ für jedes $t \in S$.

Symmetrie: $(a, s) \sim (a', s') \Rightarrow t\bullet(s'a - sa') = 0$ für ein $t \in S$

$\Rightarrow$ t•(sa' - s'a) = 0 für ein t $\in$ S

$\Rightarrow$ (a', s') $\sim$ (a, s)

Transitivität: (a, s) $\sim$ (a', s') und (a', s') $\sim$ (a'', s'')

$\Rightarrow$ es gibt u, v $\in$ S mit u•(s'a - sa') = 0 und v•(s''a' - s'a'') = 0

$\Rightarrow$ es gibt u, v $\in$ S mit

s''uv•(s'a - sa') = 0 und suv•(s''a' - s'a'') = 0

Addition liefert

s'uv•(s''a - sa'') = 0

$\Rightarrow$ (a, s) $\sim$ (a'', s'').

<u>Die Addition ist wohldefiniert</u>. Mit (a, s) $\sim$ (b, t) und (a',s') $\sim$ (b', t') gibt es u,v $\in$ S mit

u•(ta - sb) = 0 und v•(t'a' - s'b') = 0.

Zu zeigen ist, es gibt ein w$\in$S mit

w•(tt'•(s'a+sa') - ss'•(t'b+tb')) = 0 (denn dann gilt $\frac{s'a + sa'}{ss'} = \frac{t'b + tb'}{tt'}$)

Links steht

w•(s't'(ta-sb)+st(t'a'-s'b')).

Für w = uv ist dieser Ausdruck gleich Null.

<u>Die Multiplikation ist wohldefiniert</u>. Mit (a, s) $\sim$ (b, t) und (a',s') $\sim$ (b', t') gibt es u,v $\in$ S mit

u•(ta - sb) = 0 und v•(t'a' - s'b') = 0.

Zu zeigen ist, es gibt ein w$\in$S mit

w•(tt'•aa' - ss'•bb') = 0 (denn dann gilt $\frac{aa'}{ss'} = \frac{bb'}{tt'}$)

Links steht

w•(a't'(ta - sb)+sb(t'a' - s'b')).

Für w = uv ist dieser Ausdruck gleich Null.

<u>Die Menge ist ein kommutativer Ring mit</u> 1 weil A ein solcher ist.

Man beachte, es gilt $\frac{a}{s} = \frac{at}{st}$ für jedes t$\in$S, denn w•(sta - sat) = 0 für jedes w$\in$S. Damit gilt

$\frac{a}{s}\bullet\frac{t}{t} = \frac{at}{st} = \frac{a}{s}$ d.h. $\frac{t}{t}$ ist Einselement.

QED.

Zum zweiten Hinweis. <u>Bedingung</u> (i) <u>ist erfüllt</u>.

Der Quotient $\frac{as}{s}$ hängt nicht von s ab, denn für jedes t $\in$ S gilt

$\frac{as}{s} = \frac{ast}{st} = \frac{at}{t}$.

Weiter ist

$\varphi(a + b) = \frac{(a+b)s}{s} = \frac{(a+b)s^2}{s^2} = \frac{as}{s} + \frac{bs}{s} = \varphi(a) + \varphi(b)$.

$\varphi(ab) = \frac{abs}{s} = \frac{abs^2}{s^2} = \frac{as}{s}\bullet\frac{bs}{s} = \varphi(a)\bullet\varphi(b)$.

$\varphi(1) = \frac{s}{s}$ und $\frac{s}{s}$ ist das Einselement von $S^{-1}A$ (siehe oben).

Für a $\in$ S ist $\varphi(a) = \frac{as}{s}$ eine Einheit mit dem Inversen $\frac{s}{as}$.

Bedingung (ii) ist erfüllt. Sei ψ: A $\longrightarrow$ B ein Homomorphismus von Ringen mit 1, welcher die Elemente von S in Einheiten von B abbildet. Wir setzen

$$\tilde{\psi}(\frac{a}{s}) = \psi(a)\cdot\psi(s)^{-1} \text{ für } \frac{a}{s} \in S^{-1}A \text{ (d.h. } a\in A \text{ und } s\in S).$$

Diese Definiiton ist korrekt, denn im Fall $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$ gibt es ein u∈S mit

$$u\cdot(ta - sb) = 0$$

also

$$\psi(u)\cdot(\psi(t)\psi(a) - \psi(s)\psi(b)) = 0.$$

Weil $\psi(u)$ eine Einheit in B ist, folgt

$$\psi(t)\psi(a) = \psi(s)\psi(b)$$

also

$$(\tilde{\psi}(\frac{a}{s}) =)\ \psi(a)\cdot\psi(s)^{-1} = \psi(b)\cdot\psi(t)^{-1}\ (= \tilde{\psi}(\frac{b}{t})).$$

Nach Konstruktion folgt für jedes a ∈ A:

$$\tilde{\psi}(\varphi(a)) = \tilde{\psi}(\frac{as}{s}) = \psi(as)\cdot\psi(s)^{-1} = \psi(a),$$

d.h.

$$\tilde{\psi}\circ\varphi = \psi.$$

Wir haben noch zu zeigen, $\tilde{\psi}$ ist der einzige Homomorphismus von Ringen mit 1, für welchen gilt $\tilde{\psi}\circ\varphi = \psi$.

Sei α: $S^{-1}A \longrightarrow B$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1 mit $\alpha\circ\varphi = \psi$. Wir haben zu zeigen $\alpha=\psi$. Für a ∈ A und s ∈ S gilt

$$\alpha(\frac{a}{s})\cdot\alpha(\frac{s^2}{s}) = \alpha(\frac{a}{s}\cdot\frac{s^2}{s}) = \alpha(\frac{as^2}{s^2}) = \alpha(\varphi(a)) = \psi(a).$$

Außerderm ist

$$\alpha(\frac{s^2}{s}) = \alpha(\varphi(s)) = \psi(s).$$

Zusammen folgt

$$\alpha(\frac{a}{s})\cdot\psi(s) = \psi(a).$$

Weil $\psi(s)$ eine Einheit ist, folgt

$$\alpha(\frac{a}{s}) \quad = \psi(a)\cdot\psi(s)^{-1} = \tilde{\psi}(\frac{a}{s}).$$

Also ist $\alpha = \psi$.

QED.

Zu Aufgabe 1.4.4. Jedes Element f ∈ k[X] ist eine reguläre Funktion auf ganz X, also insbesondere in einer Umgebung von p ∈ X. Wir betrachten die Abbildung

$$\alpha: k[X] \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p},\ f \mapsto [f].$$

Dies ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1. Jedes $f \in k[X] - M_p$ ist in p ungleich Null, wird also bei α in eine Einheit abgebildet. Nach Hinweis 2 faktorisiert sich die Abbildung α über $k[X]_{M_p}$, d.h. es gibt einen Homomorphismus von Ringen mit 1,

$$\widetilde{\alpha}:k[X]_{M_p} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}, \frac{a}{s} \mapsto [s]^{-1}\bullet[a] = [\frac{a}{s}] \qquad (a,s \in k[X], s \text{ nicht in } M_p).$$

Weil jede in einer Umgebung von p reguläre Funktion die Gestalt $\frac{a}{s}$ hat mit $a,s \in k[X]$ und $s(p) \ne 0$, ist die Abbildung $\widetilde{\alpha}$ surjektiv. Sei jetzt

$$\frac{a}{s} \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\alpha}).$$

Dann gilt $[\frac{a}{s}] = 0$, d.h. $\frac{a}{s}$ in einer Umgebung von p identisch Null. Weil die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis bilden, gibt es ein $h \in k[X]$ mit:

1. $p \in D(h)$, d.h. $h(p) \ne 0$.
2. $s(x) \ne 0$ für $x \in D(h)$, d.h. für $h(x) \ne 0$ (wegen $\frac{a}{s}$ regulär)
3. $\frac{a}{s}$ ist gleich 0 auf D(h).

Wegen der dritten Bedingung gilt $a(x) = 0$ für $h(x) \ne 0$, d.h. $ah = 0$ in allen Punkten von X. In k[X] ist daher

$$0 = h\bullet a = h\bullet(1\bullet a - s\bullet 0).$$

Wegen $h(p) \ne 0$ gilt $h \in k[X]-M_p$, also $\frac{a}{s} = \frac{0}{1}$ in $k[X]_{M_p}$, d.h. $\frac{a}{s}$ ist das Nullelement von $k[X]_{M_p}$. Wir haben gezeigt der Kern von $\widetilde{\alpha}$ besteht nur aus dem Nullelement.

Also ist $\widetilde{\alpha}$ bijektiv, d.h. ein Isomorphismus.
QED.

1.4.5 Die globalen Schnitte der Strukturgarbe einer algebraischen Varietät

Für jede algebraische Varietät $(X, \mathcal{O}_X)$ über dem Körper k ist die natürlichen Abbildung

$$k[X] \longrightarrow \mathcal{O}_X(X), f \mapsto f,$$

ein Isomorphismus, d.h. die globalen Schnitte der Strukturgarbe von X sind gerade die polynomialen Funktion auf X.
Beweis. Die Abbildung ist trivialerweise injektiv. Wir haben ihre Surjektivität zu beweisen. Sei

$$f \in \mathcal{O}_X(X).$$

Nach Definition gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x,

$$x \in U_x \subseteq X, U_x \text{ offen in } X,$$

und Elemente $g_x, h_x \in k[X]$ mit

$$h_x(y) \ne 0 \text{ und } f(y) = \frac{g_x(y)}{h_x(y)} \text{ für jedes } y \in U_x. \tag{1}$$

Weil die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis der Zariski-Topologie bilden, können wir annehmen, U_x ist eine offene Hauptmenge, d.h.

$$U_x = D(a_x) \text{ mit } a_x \in k[X].$$

1. <u>Schritt</u>. Reduktion auf den Fall $a_x = h_x$

Wegen (1) gilt $D(a_x) \subseteq D(h_x)$, also $V(h_x) \subseteq V(a_x)$, also

$$a_x \in \sqrt{a_x \cdot k[X]} \subseteq \sqrt{h_x \cdot k[X]},$$

d.h. eine Potenz von a_x ist ein Vielfaches von h_x, sagen wir

$$a_x^{n_x} = h_x \cdot h'_x \text{ mit } n_x \in \mathbb{N} \text{ und } h'_x \in k[X].$$

In den Punkten von $U_x = D(a_x)$ folgt

$$f = \frac{g_x}{h_x} = \frac{g_x}{a_x^{n_x}/h'_x} = \frac{g_x h'_x}{a_x^{n_x}}$$

Den Nenner in der Darstellung von f können wir also durch eine Potenz von a_x ersetzen. Da sich $U_x = D(a_x)$ nicht ändert, wenn wir a_x in eine Potenz erheben, können wir annehmen,

$$h_x = a_x.$$

2. <u>Schritt</u>. Beweis der Behauptung.

Die offenen Mengen $U_x = D(h_x)$ mit $x \in X$ bilden eine offene Überdeckung von X. Weil X quasi-kompakt ist, überdecken bereits endlich viele der U_x den Raum X. Wir finden also endlich viele

$$h_1, ..., h_s \in k[X] \text{ und zugehörige } g_1,..., g_s \in k[X]$$

mit

$$X = D(h_1) \cup ... \cup D(h_s) \text{ und } f = \frac{g_i}{h_i} \text{ auf } U_i = D(h_i).$$

Für je zwei Indizes $i, j \in \{1,...,s\}$ gilt

$$\frac{g_i}{h_i} = f = \frac{g_j}{h_j} \text{ auf } U_i \cap U_j = D(h_i h_j).$$

Deshalb ist $g_i h_j - g_j h_i$ gleich Null auf $D(h_i h_j)$ und $h_i h_j = 0$ außerhalb $D(h_i h_j)$. Zusammen ergibt sich:

$$h_i h_j \cdot (g_i h_j - g_j h_i) = 0 \text{ in } k[X],$$

d.h.

$$h_j^2 \cdot g_i \cdot h_i = h_j \cdot g_j \cdot h_i^2 = 0 \text{ in } k[X]. \tag{2}$$

Weil die $D(h_i)$ den Raum X überdecken, liegt jeder Punkt in einem $D(h_i)$, d.h. in jedem Punkt ist ein h_i von Null verschieden. Damit ist

$$V(h_1^2,...,h_s^2) = \emptyset = V(1),$$

also

$$1 \in \sqrt{1 \cdot k[X]} = \sqrt{h_1^2 \cdot k[X]+...+h_s^2 \cdot k[X]}.$$

Damit liegt eine Potenz von 1 im Ideal $h_1^2 \cdot k[X]+...+h_s^2 \cdot [X]$. Es gibt Koeffizienten b_i mit

$$1 = \sum_{i=1}^{s} b_i \cdot h_i^2 \;,\; b_i \in k[X]. \tag{3}$$

Für $x \in D(h_j)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} h_j^2(x)\cdot \sum_{i=1}^{s} b_i(x)g_i(x)h_i(x) &= \sum_{i=1}^{s} b_i(x)h_j(x)g_j(x)h_i^2(x) && \text{(nach (2))}\\ &= h_j(x)g_j(x) \sum_{i=1}^{s} b_i(x)\; h_i^2(x) \\ &= h_j(x)g_j(x) && \text{(nach (3))}\end{aligned}$$

also - weil $h_j(x) \neq 0$ ist -

$$f(x) = \frac{g_j(x)}{h_j(x)} = \frac{h_j(x)g_j(x)}{h_j^2(x)} = \sum_{i=1}^{s} b_i(x)g_i(x)h_i(x) = (\sum_{i=1}^{s} b_ig_ih_i)(x).$$

Weil jeder Punkt $x \in X$ in einem $D(h_j)$ liegt, gilt

$$f \quad = \sum_{i=1}^{s} b_ig_ih_i$$

in allen Punkten von X, d.h. es ist

$$f \quad = \sum_{i=1}^{s} b_ig_ih_i \in k[X].$$

QED.

1.4.6 Aufgabe

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge und $f \in k[X] - \{0\}$. Dann ist der <u>Quotientenring</u>

$$k[X]_f := \{\frac{a}{f^n} \mid a\in k[X],\, n \in \mathbb{N}\} := S^{-1}k[X],\; S:= \{f^n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

isomorph zu $k[X][t]/(1-t\cdot f)$ und

$$\mathcal{O}_X(D(f))$$

Beweis. 1. <u>Schritt</u>. $k[X]_f = k[X][t]/(1-t\cdot f)$.

Es reicht zu zeigen, $k[X][t]/(1-t\cdot f)$ besitzt die Universalitätseigenschaft von $k[X]_f$.

Betrachten wir den Homomorphismus von k-Algebren.

$$\varphi:k[X] \longrightarrow k[X][t]/(1-t\cdot f),\; \alpha \mapsto \alpha \bmod(1-tf).$$

Für $p(t) \in k[X][t]$ bezeichne $[p(t)]$ die Restklasse von $p(t)$ im Faktorring rechts. Dann gilt

$$\varphi(f)\cdot[t] = [f]\cdot[t] = [f\cdot t] = [1].$$

Das Bild von f bei φ ist eine Einheit. Die Elemente von S, d.h. die Potenzen von f, werden dann aber auch in Einheiten abgebildet.
Sei jetzt

$$\psi: k[X] \longrightarrow A$$

ein Homomorphismus von k-Algebren, der das Element f und damit jedes Element von S in eine Einheiten abbildet.

Wir haben zu zeigen, ψ faktorisiert sich eindeutig über φ, d.h. es gibt ein kommutatives Diagramm von kommutativen Ringen mit 1,

$$\begin{tikzcd} k[X] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & k[X][t]/(1-t\cdot f) \arrow[dl, "\widetilde{\psi}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

und eindeutig bestimmten $\widetilde{\psi}$. Nehmen wir zunächst an, $\widetilde{\psi}$ existiert und zeigen die Eindeutigkeit. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt für $\alpha\in k[X]$:

$$\widetilde{\psi}(\ \alpha \bmod (1\text{-}t\cdot f) \qquad = \widetilde{\psi}(\varphi(\alpha)) = \psi(\alpha)$$

d.h. $\widetilde{\psi}$ ist auf dem von Bild k[X] eindeutig festgelegt.
Weiter ist

$$\begin{aligned} \psi(f)\cdot\widetilde{\psi}(t \bmod (1\text{-}t\cdot f)) &= \widetilde{\psi}(\varphi(f))\cdot \widetilde{\psi}(t \bmod (1\text{-}t\cdot f)) && (\text{wegen } \psi = \widetilde{\psi}\circ\varphi) \\ &= \widetilde{\psi}(\ f \bmod (1\text{-}t\cdot f))\cdot \widetilde{\psi}(t \bmod (1\text{-}t\cdot f)) && (\text{Definition von } \varphi) \\ &= \widetilde{\psi}(f\cdot t \bmod (1\text{-}t\cdot f)) && (\widetilde{\psi} \text{ ist ein Ring-Homomorphismus}) \\ &= \widetilde{\psi}(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

also

$$\widetilde{\psi}(t \bmod (1\text{-}t\cdot f)) \qquad = \psi(f)^{-1}.$$

Damit ist das Bild der Restklasse von t eindeutig festgelegt. Weil $k[X][t]/(1\text{-}t\cdot f)$ über k[X] von dieser Restklasse erzeugt wird, ist $\widetilde{\psi}$ festgelegt.

<u>Existenz von</u> $\widetilde{\psi}$.

Wir setzen ψ auf den Polynomring fort, indem wir die Unbestimmte in $\psi(f)^{-1}$ abbilden:

$$\widetilde{\psi}': k[X][t] \longrightarrow A,\ t \mapsto \psi(f)^{-1},\ p(t) \mapsto p^{\psi}(\psi(f)^{-1}).$$

Dabei bezeichne p^{ψ} das Polynom in t, welches man aus p erhält, indem man auf alle Koeffizienten von p die Abbildung ψ anwendet.

Es gilt $\widetilde{\psi}'(1\text{-}t\cdot f) = \widetilde{\psi}'(1) - \widetilde{\psi}'(t)\cdot \widetilde{\psi}'(f) = 1 - \psi(f)^{-1}\cdot\psi(f) = 1\text{-}1 = 0$, d.h. $\widetilde{\psi}'$ faktorisiert sich über $k[X][t]/(1\text{-}t\cdot f)$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[X] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & k[X][t]/(1-t\cdot f) \arrow[dl, "\widetilde{\psi}'"] \\ A & \end{tikzcd}$$

mit $\widetilde{\psi}'(p(t) \bmod (1\text{-}t\cdot f)) = \widetilde{\psi}(p(t)) = p^{\psi}(\psi(f)^{-1})$, d.h. ψ faktorisiert sich über φ. Damit ist die Aussage des ersten Schritts bewiesen.

2. <u>Schritt</u>. $\mathcal{O}_X(D(f)) = k[X]_f$

Die Menge

$$Y := \{(x, \lambda) \mid x \in X \text{ und } \lambda\in k \text{ mit } 1\text{-}\lambda\cdot f(x) = 0\}$$

ist eine algebraische Menge von k^{n+1}. Ihren Koordinatenring erhält man aus dem Faktorring

$$k[X][t]/(1\text{-}t\bullet f) = k[X]_f\,,$$

indem man das Ideal (1-t•f) durch dessen Radikal ersetzt. Weil k[X] reduziert ist, ist es auch $k[X]_f$, d.h. das Ideal (1-t•f) ist gleich seinem Radikal und der Koordinationring von Y ist gleich

$$k[Y] = k[X][t]/(1\text{-}t\bullet f).$$

Damit gilt nach 1.4.5,

$$\mathcal{O}_Y(Y) = k[X]_f.$$

Die Abbildung

$$Y \longrightarrow X,\ (x, \lambda) \mapsto x,$$

ist injektiv, weil durch die Bedingung $1\text{-}\lambda\bullet f(x) = 0$ der Wert von λ eindeutig durch f(x) festgelegt ist. Das Bild dieser Abbildung besteht aus allen $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$. Damit ist die Abbildung

$$\varphi: Y \longrightarrow D(f),\ (x, \lambda) \mapsto x,$$

wohldefiniert und bijektiv. Für jede auf D(f) reguläre Funktion α ist $\alpha\circ\varphi$ regulär auf Y. Wir erhalten so eine injektive Abbildung

$$\mathcal{O}_X(D(f)) \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(Y) = k[X]_f$$

Andererseits ist für jedes $a \in k[X]$ und jede natürliche Zahl n, der Quotient $\frac{a}{f^n}$ eine reguläre Funktion auf D(f), d.h. jedes Element von $\mathcal{O}_Y(Y) = k[X]_f$ kommt von einem Element von $\mathcal{O}_X(D(f))$,

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_Y(Y) = k[X]_f$$

QED.

1.4.7 Morphismen

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ geometrische Räume und

$$\psi: X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Für jede Funktion

$$f: V \longrightarrow Z$$

auf einer offenen Menge $V \subseteq Y$ mit Werten in irgendeiner Menge Z bezeichnen wir mit

$$\psi^*(f) = \overset{*}{\psi}_V(f) := f\circ\psi: \psi^{-1}(V) \xrightarrow{\psi|_{\psi^{-1}(V)}} V \xrightarrow{f} Z$$

die <u>Verpflanzung</u> von f entlang ψ. Die stetige Abbildung ψ heißt <u>Morphismus von geometrischen Räumen</u>, wenn

$$\psi^*(\mathcal{O}_Y(V)) \subseteq \mathcal{O}_X(\psi^{-1}(V))$$

gilt für jede offene Menge $V \subseteq Y$, d.h. wenn die Verpflanzung entlang ψ für jedes offene $V \subseteq Y$ einen Homomorphismus von k-Algebren

$$\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{\psi^*} \mathcal{O}_X(\psi^{-1}(V)),\ f \mapsto f\circ\psi.$$

definiert.

Sind insbesondere $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ affine algebraische Varietäten (über k), so heißt der Morphismus ψ auch <u>Morphismus von affinen algebraischen</u> Varietäten oder auch <u>reguläre Abbilung</u>.

Beispiel 1

Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so definiert die natürlichen Einbettung

$$Y \hookrightarrow X$$

einen Morphismus von geometrischen Räumen

$$(Y, \mathcal{O}_X|_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X).$$

Zur Definition von $\mathcal{O}_X|_Y$ siehe 1.4.2.

Beispiel 2

Seien $X \subseteq \mathbb{R}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und $\mathcal{O}_X$ bzw. $\mathcal{O}_Y$ die Garben der differenzierbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ auf X bzw. Y. Eine stetige Abbildung

$$\psi: X \longrightarrow Y$$

ist genau dann ein Morphismus geometrischer Räume $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y$, wenn die Koordinaten-Funktionen von ψ differenzierbar sind. Die Bedingung ist hinreichend, denn die Zusammensetzung mit ψ

$$\psi^*: \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\psi^{-1}(V)),\ f \mapsto \psi^*(f) = f \circ \psi.$$

überführt dann differenzierbare Funktionen in differenzierbare Funktionen. Die Bedingung ist notwendig, denn für jedes i ist die Projektion auf die i-te Koordinate

$$y_i: Y \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Also muß auch die Verpflanzung

$$y_i \circ \psi: X \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar sein. Diese Verpflanzung ist aber gerade die i-te Koordinaten-Funktion von ψ.

Beispiel 3

Dieselben Betrachtungen wie in Beispiel 2 kann man mit algebraischen Mengen

$$X \subseteq k^m \text{ und } Y \subseteq k^n$$

und den Garben $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_Y$ der regulären Funktionen auf X bzw. Y anstellen. Eine stetige Abbildung

$$\psi: X \longrightarrow Y$$

ist genau dann eine Morphismus von geometrischen Räumen

$$(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y),$$

wenn die Koordinaten-Funktionen von ψ reguläre Funktionen auf X sind. Die Aussagen bleiben auch richtig, wenn X und Y offene Teilmengen von algebraischen Mengen sind. Die Koordinatenfunktionen eines Morphismus müssen dann lokal durch Quotienten von Polynomen gegeben sein.

Bemerkungen

(i) Die geometrischen Räume bilden zusammen mit den Morphismen geometrischer Räume (und der gewöhnlichen Zusammensetzung von Abbildungen) eine Kategorie

(ringed spaces).

Die affinen algebraischen Varietäten über k bilden eine vollen Teilkategorie

$$\text{(affine Varieties/k)} \subseteq \text{(ringed spaced).}$$

Die Isomorphismen in diesen Kategorien heißen <u>Isomorphismen geometrischer Räume</u> bzw. <u>Isomorphismen affiner Varietäten</u> (über k).

(ii) Ein Morphismus $\psi: X \longrightarrow Y$ von affinen algebraischen Varietäten über k definiert einen k-Algebra-Homomorphismus der globalen Schnitte der Strukturgarben

$$\psi^*: \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X), f \mapsto \psi^*(f) = f \circ \psi.$$

Nach 1.4.5 ist dies ein k-Algebra-Homomorphismus der Koordinaten-Ringe

$$\psi^*: k[Y] \longrightarrow k[Y].$$

(iii) Umgekehrt definiert jeder k-Algebra-Homomorphismus der Koordinaten-Ringe

$$h: k[Y] \longrightarrow k[X]$$

von affinen k-Varietäten X bzw. Y eine Abbildung

$$h^{\#}: X \longrightarrow Y.$$

(iv) Die in (iii) konstruierte Abbildung $h^{\#}: X \longrightarrow$ ist stetig. Zum Beweis reicht es zu zeigen,

$$(h^{\#})^{-1}(D(f)) = D(h(f)),$$

denn dann ist das vollständige Urbild jeder offenen Menge offen.

(v) Die in (iii) konstruierte Abbildung $h^{\#}: X \longrightarrow Y$ ist ein Morphismus affiner Varietäten über k.

(vi) Die in (ii) und (iii) konstruierten Abbildungen

$$X \xrightarrow{\psi} Y \mapsto k[Y] \xrightarrow{\psi^*} k[X]$$

und

$$k[Y] \xrightarrow{h} k[X] \mapsto X \xrightarrow{h^{\#}} Y$$

sind invers zueinander. Genauer, sie definieren zueinander quasi-inverse Funktoren

$$\text{(Affine Varietäten über k)} \leftrightarrows \text{(affine k-Algebren ohne nilpotente)}$$

Beweis. <u>Zu</u> (iii). Die Behauptung kann man am einfachsten einsehen, indem man die Punkte von X und Y mit den maximalen Idealen von k[X] bzw. k[Y] idenifiziert. Für jedes maximale Ideal $M \subseteq k[X]$ ist der Kern der Zusammensetzung

$$k[Y] \xrightarrow{h} k[X] \longrightarrow k[X]/M = k$$

von h mit dem natürlichen Homomorphismus auf den Faktorring gleich $h^{-1}(M)$. Nach dem Homomorphie-Satz erhält man einen injektiven k-Algebra-Homormophismus

$$(k \subseteq)\ k[Y]/h^{-1}(M) \hookrightarrow k[X]/M = k, \qquad (1)$$

$$g \bmod h^{-1}(M) \mapsto h(g) \bmod M$$

d.h. es gilt $k[Y]/h^{-1}(M) = k$ und $h^{-1}(M)$ ist ein maximales Ideal von k[Y] und die gesuchte Abbildung ist gerade die Abbildung

$$h^{\#}: X \longrightarrow Y, x = M_x \mapsto h^{-1}(M_x) = h^{\#}(x) = M_{h^{\#}(x)}$$

<u>Zu</u> (iv). Für $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} x \in D(h(f)) &\Leftrightarrow h(f)(x) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow h(f) \notin M_x \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f \notin h^{-1}(M_x) = M_{h^\#(x)}$$
$$\Leftrightarrow f(h^\#(x)) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow h^\#(x) \in D(f)$$

Zu (v). Für $x \in X$ und $g \in k[Y]$ gilt

$$g(h^\#(x)) = g \bmod M_{h^\#(x)} = g \bmod h^{-1}(M_x)$$

und weil h ein k-Algebra-Homomorphismus ist[44]

$$g(h^\#(x)) = h(g) \bmod M_x = h(g)(x),$$

d.h. die Verpflanzung von g entlang $h^\#$ ist h:

$$(h^\#)^*(g) = h(g) \qquad \text{für jedes } g \in k[Y]$$

Weil $(h^\#)^*$ und h Homomorphismen von k-Algebren sind, gilt damit sogar

$$(h^\#)^*(g_1/g_2) = h(g_1)/h(g_2) \qquad \text{für jedes } g \in k[Y]$$

Für jedes $g \in k[Y]$ bildet die Zusammensetzung

$$k[Y] \xrightarrow{h} k[X] \longrightarrow k[X]_{h(g)}$$

die Potenzen von g in Einheiten ab, induziert also einen k-Algebra-Homomorphismus

$$k[Y|_g \longrightarrow k[X]_{h(g)}, \frac{a}{g^s} \mapsto \frac{h(a)}{h(g)^n}$$

d.h. eine k-Algebra-Homomorphismus

$$h^\#: \mathcal{O}_Y(D(g)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(h(g)) = \mathcal{O}_X((h^\#)^{-1}D(g)).$$

Mit anderen Worten, die Verpflanzung entlang $h^\#$ einer auf D(g) regulären Funktion ist regulär auf $(h^\#)^{-1}D(g)$. Damit ist aber für jede offene Menge $V \subseteq Y$ die Verpflanzung entlang $h^\#$ einer auf V regulären Funktion regulär auf $(h^\#)^{-1}(V)$ (weil V Vereinigung offener Hauptmengen ist).

Zu (vi). Sei

$$h: k[Y] \longrightarrow k[X]$$

ein k-Algebra-Homomorphismus. Wie wir gerade gesehen haben, ist dann

$$(h^\#)^*(g) = h(g) \text{ für jedes } g \in k[Y], \tag{2}$$

d.h. der durch $h^\#: X \longrightarrow Y$ definierte k-Algebra-Homomorphismus

$$(h^\#)^*: k[Y] \longrightarrow k[X], g \mapsto (h^\#)^*(g) = h(g),$$

ist der Ausgangshomomorphismus h,

$$(h^\#)^* = h.$$

Sei

$$\psi: X \longrightarrow Y$$

ein Morphismus affiner k-Varietäten und

$$\psi^*: k[Y] \longrightarrow k[X], g \mapsto \psi^*(g) = g \circ \psi,$$

die Verpflanzung entlang ψ. Für den zugehörigen Morphismus von k-Varietäten

$$(\psi^*)^\#: X \longrightarrow Y$$

---

[44] Als k-Algebra-Homomorphismus induziert h auf dem Teilkörper k der betrachteten Faktorringe die identische Abbildung, vgl. (1).

gilt dann

$$((\psi^*)^{\#})^*(g) = \psi^*(g) \text{ für jedes } g \in k[Y]$$

(nach (2) mit $h := \psi^*$). Speziel für den Fall, daß g die Projektion auf die i-te Koordinate ist, erhalten wir, daß die Abbildungen $(\psi^*)^{\#}$ und ψ dieselbe i-te Koordinaten-Funktion haben. Da dies für alle i gilt, folgt

$$(\psi^*)^{\#} = \psi.$$

QED.

1.4.8 Aufgaben

(1) Beweisen Sie die Aussagen des vorangehenden Abschnitts.

(2) Definieren Sie Kategorien, deren Objekte die affinen k-Algebren bzw. die affinen algebraischen Varietäten über k sind. Zeigen Sie, diese Kategorien sind anti-äquivalent (zum Kategorien-Begriff siehe Lang, S.: Algebra, Addison-Wesley 1977, Kapitel I, §7 oder Jacobson, N.: Basic Algebra II, Freeman 1980, Kapitel I).

(3) Ein Morphismus $\psi: X \longrightarrow Y$ von affinen Varietäten über k ist genau dann ein Isomorphismus, wenn der k-Algebra-Homomorphismus ψ^* ein Isomorphismus ist.

1.4.9 Affine F-Varietäten

1.4.9 A Definitionen

Seien $F \subseteq k$ ein Teilkörper und $(X, \mathcal{O}_X)$ eine affine k-Varietät. Eine <u>F-Struktur</u> auf

$$(X, \mathcal{O}_X)$$

ist durch die folgenden Daten gegeben.

(a) Eine F-Struktur F[X] auf der algebraischen Menge X in Sinne von 1.3.7.

(b) Für jede F-offene Teilmenge U von X eine F-Teilalgebra

$$\mathcal{O}_X(U)(F) \subseteq \mathcal{O}_X(U)$$

der k-Algebra $\mathcal{O}_X(U)$ für welche der k-Algebra-Homomorphismus

$$k\otimes_F \mathcal{O}_X(U)(F) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U),\ c\otimes f \mapsto c\cdot f,$$

ein Isomorphismus ist und die Zuordnung

$$\{\text{F-offene Teilmengen von X}\} \longrightarrow \{\text{F-Algebren}\},\ U \mapsto \mathcal{O}_X(U)(F),$$

Eigenschaften hat, die analog sind zu den Garbenaxiomen:

(A) Für je zwei F-offene Mengen U und V mit $U \subseteq V$ definiert die Einschränkung auf U einen F-Algebra-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_X(V)(F) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)(F),\ f \mapsto f|_U.$$

(B) Seien U eine F-offene Menge,

$$U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$$

eine Überdeckung von U durch F-offene Teilmengen U_α und

$$f_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)(F) \text{ mit } \alpha\in A$$

eine Familie von Elementen f_α mit

$$f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

für beleibige $\alpha, \beta \in A$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit

$$f|_{U_\alpha} = f_\alpha \text{ für jedes } \alpha \in A.$$

(c)[45] $F[X] \subseteq \mathcal{O}_X(X)(F)$ und jede Funktion $f \in \mathcal{O}_X(X)(F)$ ist lokal von der Gestalt

$$f = \frac{g}{h} \text{ mit } g, g \in F[X].$$[46]

Eine affine Varietät über k mit F-Struktur heißt affine F-Varietät. Die Morphismen solcher affinen F-Varietäten sind in der offensichtlichen Weise definiert und heißen F-Morphismen.[47]

1.4.9 B Eigenschaften der F-Algebren $\mathcal{O}_X(U)(F)$ einer F-Varietät X

(i) Der Beweis von 1.4.5 über die globalen Schnitte der Strukturgarbe, läßt sich auf den Fall von F-Varietäten verallgemeinern und zeigt die Bijektivität der natürlichen Abbildung

$$F[X] \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)(F). \qquad (1)$$

(ii) Für jedes $f \in F[X] - \{0\}$ induziert die natürliche Abbildung (1) einen Isomorphismus

$$F[X]_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(f))(F).$$

(iii) Für je zwei $f, g \in F[X]$ mit $D(g) \subseteq D(f)$ ist das Bild von f bei der natürlichen Abbildung $F[X] \longrightarrow F[X]_g$ in den Quotientenring eine Einheit induziert also eine Abbildung

$$F[X]_f \longrightarrow F[X]_g .$$

Diese ist gerade die Einschränkung der Garben-Restriktion

$$\mathcal{O}_X(D(f)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(g))$$

auf $F[X]_f = \mathcal{O}_X(D(f))(F)$.

---

[45] Diese Bedingung fehlt im Original. Sie solte Bestehen, weil auf Grund der nachfolgenden Bemerkungen sogar $F[X] = \mathcal{O}_X(X)(F)$ gelten soll.

[46] Genauer: für jeden Punkt $x \in X$ gilt es eine offene Umgebung U von x und Funktionen $g, h \in F[X]$ mit $h(x) \neq 0$ und $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ für beliebige $x \in U$.

[47] Ein F-Morphismus von affinen F-Varietäten X und Y mit den F-Strukturen F[X] bzw. F[Y] auf den Koordinaten-Ringen, ist ein Morphismus $f: X \longrightarrow Y$ von k-Varietäten, der von einem Homomorphismus von F-Algebren $h: F[Y] \longrightarrow F[X]$ kommt. Genauer: man gehe zum zugehörigen Homomorphismus

$$h\otimes id: k[Y] = k\otimes_F F[Y] \longrightarrow k\otimes_F F[X] = k[X]$$

und dann zum zugehörigen Morphismus von k-Varietäten, d.h.

$$f := (h\otimes id)^{\#}: X \longrightarrow Y.$$

(iv) Für jede F-offene Teilmenge $U \subseteq X$ und jede offene Überdeckung

$$U = \bigcup_{i\in I} D(f_\alpha) \text{ mit } f_\alpha \in F[X]$$

ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)(F) \xrightarrow{\eta} \prod_{i\in I} \mathcal{O}_X(D(f_i))(F) \underset{\zeta}{\overset{\xi}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I^2} \mathcal{O}_X(D(f_i f_j))(F)$$

mit

$$\eta(s) := (s|_{D(f_i)})_{i\in I}$$

$$\xi((s_i)_{i\in I}) := (s_i|_{D(f_i f_j)})_{(i,j)\in I^2}$$

$$\xi((s_i)_{i\in I}) := (s_j|_{D(f_i f_j)})_{(i,j)\in I^2}$$

exakt, d.h. $\mathcal{O}_X(U)$ ist gerade der Differnzkokern von ξ und ζ (d.h. der Kern von ξ-ζ in der Kategorie der F-Vektorräume). Zusammen mit den Bemerkungen (ii) und (iii) bedeutet dies, daß die F-Struktur der affinen Varietät vollständig durch die F-Struktur F[X] des Koordinatenrings k[X] festgelegt ist.

Beweis. Zu (i). Die Abbildung ist trivialerweise injektiv. Wir haben ihre Surjektivität zu beweisen. Sei

$$f \in \mathcal{O}_X(X)(F).$$

Wegen $X = D(0)$ und $0 \in F[0]$ ist X eine F-offene Menge von X. Nach Definition gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x,

$$x \in U_x \subseteq X,\ U_x \text{ offen in } X,$$

und Elemente $g_x, h_x \in F[X]$ mit

$$h_x(y) \neq 0 \text{ und } f(y) = \frac{g_x(y)}{h_x(y)} \text{ für jedes } y \in U_x. \tag{2}$$

Weil die Mengen der Gestalt D(f) mit $f \in F[X]$ eine Topologie-Basis der F-Topologie bilden (vgl. die Fußnote zu Bemerkung 1.3.8 (iii) und den Beweis dieser Bemerkung), können wir zusätzlich annehmen, U_x ist eine Menge dieser Gestalt,

$$U_x = D(a_x) \text{ mit } a_x \in F[X].$$

1. Schritt. Reduktion auf den Fall $h_x = a_x$.

Wegen (2) gilt $D(a_x) \subseteq D(h_x)$, also $V(h_x) \subseteq V(a_x)$, also

$$a_x \in \sqrt{a_x \cdot k[X]} \subseteq \sqrt{h_x \cdot k[X]},$$

d.h. es gilt eine natürliche Zahl n_x mit

$$a_x^{n_x} \in h_x k[X] \cap F[X].$$

Weil $k[X] = k\otimes_F F[X]$ treuflach ist über F[X] folgt

$$a_x^{n_x} \in h_x F[X]$$

(vgl. Matsumura [1], (4.C)(ii)), d.h.

$$a_x^{n_x} = h_x \cdot h'_x \text{ mit } n_x \in \mathbb{N} \text{ und } h'_x \in F[X].$$

In den Punkten von $U_x = D(a_x)$ folgt

$$f = \frac{g_x}{h_x} = \frac{g_x}{a_x^{n_x}/h'_x} = \frac{g_x h'_x}{a_x^{n_x}}$$

Den Nenner in der Darstellung von f können wir also durch eine Potenz von a_x ersetzen. Da sich $U_x = D(a_x)$ nicht ändert, wenn wir a_x in eine Potenz erheben, können wir annehmen,

$$h_x = a_x.$$

2. <u>Schritt</u>. Beweis der Behauptung.

Die offenen Mengen $U_x = D(h_x)$ mit $x \in X$ bilden eine offene Überdeckung von X. Weil X quasi-kompakt ist, überdecken bereits endlich viele der U_x den Raum X. Wir finden also endlich viele

$$h_1, ..., h_s \in F[X] \text{ und zugehörige } g_1,..., g_s \in F[X]$$

mit

$$X = D(h_1) \cup ... \cup D(h_s) \text{ und } f = \frac{g_i}{h_i} \text{ auf } U_i = D(h_i).$$

Für je zwei Indizes $i, j \in \{1,...,s\}$ gilt

$$\frac{g_i}{h_i} = f = \frac{g_j}{h_j} \text{ auf } U_i \cap U_j = D(h_i h_j).$$

Deshalb ist $g_i h_j - g_j h_i$ gleich Null auf $D(h_i h_j)$ und $h_i h_j = 0$ außerhalb $D(h_i h_j)$. Zusammen ergibt sich:

$$h_i h_j \cdot (g_i h_j - g_j h_i) = 0 \text{ in } k[X],$$

d.h.

$$h_j^2 \cdot g_i \cdot h_i = h_j \cdot g_j \cdot h_i^2 = 0 \text{ in } k[X]. \tag{3}$$

Weil die $D(h_i)$ den Raum X überdecken, liegt jeder Punkt in einem $D(h_i)$, d.h. in jedem Punkt ist ein h_i von Null verschieden. Damit ist

$$V(h_1^2,...,h_s^2) = \varnothing = V(1),$$

also

$$1 \in \sqrt{1 \cdot k[X]} = \sqrt{h_1^2 \cdot k[X] + ... + h_s^2 \cdot k[X]}.$$

Damit liegt eine Potenz von 1 im Ideal $h_1^2 \cdot k[X]+...+h_s^2 \cdot k[X]$, d.h.

$$1 \in h_1^2 \cdot k[X]+...+h_s^2 \cdot k[X].$$

Diese Aussage bleibt richtig, wenn man k durch die algebraische Abschließung $\overline{F}$ von F in k ersetzt (weil X eine F-Varietät ist, d.h. bezüglich einer geeigneten Einbettung von X in einen k^n besitzt I(X) ein Erzeugendensystem aus Polynomen mit Koeffizienten aus

F, vgl. Bemerkung (ii) zum zweiten Teil von 1.3.7). Im Fall $k = \overline{F}$ ist aber Koordinatenring $k[X] = k\otimes_F F[X]$ ganz über $F[X]$. Das Ideal

$$h_1^2\cdot k[X]+...+h_s^2\cdot F[X].$$

kann kein echtes Ideal sein (weil seine Erweiterung in $k[X]$ nicht echt ist, d.h. es gilt

$$1 \in h_1^2\cdot F[X]+...+h_s^2\cdot F[X]$$

(auch im Fall $k \neq \overline{F}$). Es gibt Koeffizienten b_i mit

$$1 = \sum_{i=1}^{s} b_i\cdot h_i^2 \text{ , } b_i \in F[X]. \tag{4}$$

Für $x \in D(h_j)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} h_j^2(x)\cdot \sum_{i=1}^{s} b_i(x)g_i(x)h_i(x) &= \sum_{i=1}^{s} b_i(x)h_j(x)g_j(x)h_i^2(x) && \text{(nach (3))}\\ &= h_j(x)g_j(x) \sum_{i=1}^{s} b_i(x)\ h_i^2(x) \\ &= h_j(x)g_j(x) && \text{(nach (4))} \end{aligned}$$

also - weil $h_j(x) \neq 0$ ist -

$$f(x) = \frac{g_j(x)}{h_j(x)} = \frac{h_j(x)g_j(x)}{h_j^2(x)} = \sum_{i=1}^{s} b_i(x)g_i(x)h_i(x) = (\sum_{i=1}^{s} b_ig_ih_i)(x).$$

Weil jeder Punkt $x \in X$ in einem $D(h_j)$ liegt, gilt

$$f = \sum_{i=1}^{s} b_ig_ih_i$$

in allen Punkten von X, d.h. es ist

$$f = \sum_{i=1}^{s} b_ig_ih_i \in k[X].$$

Zu (ii). Im ersten Schritt des Beweises von (i) haben wir gezeigt, daß jeder Schnitt von $\mathcal{O}_X(D(f))(F)$ die Gestalt $\frac{a}{f^n}$ mit $a \in F[X]$ hat. Damit besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(D(f))(F) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ j\downarrow & & \parallel \\ F[X]_f & \hookrightarrow & k[X]_f \end{array},$$

und damit eine exakte Sequenz von Vektorräumen über F,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(f))(F) \xrightarrow{j} F[X]_f \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

Durch Anwenden des Funktors $k\otimes_F$ erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow k\otimes_F\mathcal{O}_X(D(f)) \xrightarrow{k\otimes j} k\otimes_F F[X]_f \longrightarrow k\otimes_F C \longrightarrow 0.$$

Weil $\mathcal{O}_X(D(f))(F)$ eine F-Struktur von $\mathcal{O}_X(D(f))$ ist, induziert die Multiplikation einen Isomorphimus

$$k\otimes_F\mathcal{O}_X(D(f))(F) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(D(f)) = k[X]_f.$$

Weil F[X] eine F-Struktur von k[X] ist, gilt

$$k\otimes_F F[X]_f \cong k\otimes_F F[X]\otimes_{F[X]} F[X]_f \cong k[X]\otimes_{F[X]} F[X]_f \cong k[X]_f .$$

Zusammen ergibt sich, daß $k\otimes j$ ein Isomorphismus ist. Deshalb gilt $k\otimes_F C = 0$, also

$$C = 0.$$

Damit ist j bijektiv, d.h. das Bild der natürlichen Einbettung

$$\mathcal{O}_X(D(f))(F) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(D(f)) = k[X]_f$$

ist gleich $F[X]_f$.

<u>Zu (iii)</u>. Wegen $D(g) \subseteq D(f)$ gilt $V(f) \subseteq V(g)$, also

$$g \in \sqrt{g\cdot k[X]} \subseteq \sqrt{f\cdot k[X]}.$$

Es gibt eine natürliche Zahl n mit

$$g^n \in f\cdot k[X] \cap F[X] = f\cdot F[X].$$

Das Gleichheitszeichen recht besteht weil

$$k[X] = k\otimes_F F[X] \text{ treuflach über } F[X]$$

ist (vgl. Matsumura [1], (4.C)(ii)). Es gibt ein $h \in F[X]$ mit

$$g^n = f\cdot h.$$

Damit ist das Bild von f beim natürlichen Homomorphismus

$$F[X] \longrightarrow F[X]_g$$

in den Quotientenring eine Einheit. Der Homomorphismus faktorisiert sich über $F[X]_f$ und definiert so einen F-Algebra-Homomorphismus

$$i_{f,F}: F[X]_f \longrightarrow F[X]_g.$$

Die obige Argumentation funktioniert für jeden Teilkörper F von k, also auch für den Fall F = k. Wir erhalten so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} F[X]_f & \hookrightarrow & k[X]_f & = & \mathcal{O}_X(D(f)) \\ i_{f,f}\downarrow & & \downarrow i_{f,k} & & \\ F[X]_g & \hookrightarrow & k[X]_g & = & \mathcal{O}_X(D(g)) \end{array},$$

dessen horizontale Einbettungen durch die natürliche Einbettung $F[X] \hookrightarrow k[X]$ induziert sind. Die rechte vertikale Abbildung $i_{f,k}$ die gerade die Restriktion der Garbe $\mathcal{O}_X$ zur Einbettung $D(g) \hookrightarrow D(f)$. Die Bilder der horizontalen Einbettungen sind wie wir beim Beweise von (ii) gesehen haben, gerade

$$\mathrm{Im}(F[X]_f \hookrightarrow k[X]_f) = \mathcal{O}_X(D(f))(F)$$

und

$$\mathrm{Im}(F[X]_g \hookrightarrow k[X]_g) = \mathcal{O}_X(D(g))(F)$$

Die Kommutativität des Diagramms ist damit gerade äquivalent zur Aussage (iii).
<u>Zu (iv)</u>. Es gilt

$$\mathrm{Ker}(\xi\text{-}\zeta) = \{ (s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{O}_X(D(f_i))(F) \mid s_i|_{D(f_if_j)} = s_j|_{D(f_if_j)} \text{ für alle } i,j\in I \}$$

Wegen $D(f_if_j) = D(f_i) \cap D(f_j)$ und auf Grund der Bedinungen (A) und (B) der Definition von 1.4.9 folgt

$$\mathrm{Ker}(\xi\text{-}\zeta) \cong \mathcal{O}_X(U)(F).$$

QED.

1.4.9 C Beispiel: die F-Struktur des affinen n-Raums $\mathbb{A}^n$

Ein Beispiel für eine affine F-Varietät ist der affine n-Raum $\mathbb{A}^n$ ($n \ge 0$) mit dem Koordinaten-Ring $k[T_1,\dots,T_n]$. Ist X eine affine F-Varietät, so kann man deren F-rationale Punkte X(F) mit der Menge der F-Morphismen $\mathbb{A}^0 \longrightarrow X$ identifizieren.

1.4.10 Aufgaben

Ergänzen Sie 1.4.9 durch die dort fehlenden Einzelheiten.
Hinweis. Die obige Definition der F-Struktur auf einer affinen k-Varietät $(X, \mathcal{O}_X)$ ist recht ungenau. Die Forderung, daß die Zuordnung

$$U \mapsto \mathcal{O}_X(U)(F),$$

den Garbenaxiomen genügt, reicht nicht. Es braucht einen engeren Zusammenhang zwischen der F-Struktur F[X] von k[X] und den F-Strukturen $\mathcal{O}_X(U)(F)$ der $\mathcal{O}_X(U)$, der sicherstellt, daß für jede F-offene Hauptmenge

$$U = D(f),\ f \in F[X],$$

die Elemente von

$$F[X]_f = \{\frac{a}{f^n} \mid a \in F[X],\ n = 0,1,2,\dots \}$$

in $\mathcal{O}_X(U)(F)$ liegen (damit sich der Beweis von 1.4.5 auf die F-Strukturen übertragen läßt). Eine alternative und formal korrekte Definition einer F-Struktur auf einer affinen k-Varietät findet man im Buch von A. Borel, Kapitel AG Algebraic geometry, §11 k structures on K schemes, section 11.3.

Borel, A.: Linear algebraic groups, W.A. Benjamin, New York Amsterdem 1969.

Da F-Strukturen erst sehr spät in dieser Vorlesung zur Anwendung kommen, nämlich erst nach der vollständigen Behandlung der Theorie über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, sollte die Behandlung der Details wohl besser auf später verschoben werden.

1.5 Produkte

1.5.1 Definition

Seien X und Y zwei affine algebraische Varietäten über k. Ein Produkt von X und Y über k ist eine affine Varietät

$$Z$$

über k zusammen mit zwei Morphismen

$$p: Z \longrightarrow X \text{ und } q: Z \longrightarrow Y$$

genannt natürliche Projektionen auf die Faktoren X bzw. Y mit der folgenden Eigenschaft, genannt Universalitätseigenschaft des Produkts.

Für jede affine Varietät Z' über k und beliebige Morphismen

$$p': Z' \longrightarrow X \text{ und } q': Z' \longrightarrow Y$$

gibt es genau einen Morphismus r: Z'⟶Z, für welchen das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, "p'"] \arrow[ddr, "q'"'] & & \\
& Z \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "q"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

kommutativ ist. Für diesen eindeutig bestimmten Morphismus r verwendet man dann oft die Bezeichnung

$$(p', q') := r$$

und nennt p' und q' <u>Koordinaten-Morphismen</u> von r.

Bemerkungen

(i) In analoger Weise kann man das Produkt zweier Objekte für jede Kategorie definieren. Für die Kategorie der Mengen **Ens**, der Gruppen (**Groups**), der abelschen Gruppen **Ab**, der topologischen Räume **Top** und viele andere Kategorien bekommt man so die üblichen direkten Produkte. Zum Beispiel kann man für je zwei Mengen X und Y in der Kategorie **Ens**

$$Z := X \times Y$$

setzen und als Projektionen p und q die Abbildungen

$$p: X\times Y \longrightarrow X,\ (x,y) \mapsto x, \text{ und } q: X\times Y \longrightarrow Y,\ (x,y) \mapsto y$$

verwenden. Die Menge Z hat dann zusammen mit den Abbildungen p und q die obige Universalitätseigenschaft (in **Ens**): für gegebene Abbildungen

$$p': Z' \longrightarrow X \text{ und } q': Z' \longrightarrow Y$$

ist die zugehörige (eindeutig bestimmte) Abbildung $r: Z' \longrightarrow X\times Y$, für welche das Diagramm (1) in **Ens** kommativ ist, gerade die Abbildung mit den Koordinatenfunktionen p' und q', d.h. die Abbildung

$$r(z') := (p'(z'), q'(z')) \text{ für } z' \in Z'.$$

(ii) Die obige Definition des Produkts von zwei affinen k-Varietäten läßt sich wie folgt in die Sprache der Koordinatenringe übersetzen:

Seien X, Y und Z drei affine k-Varietäten und

$$p: Z \longrightarrow X \text{ und } q: Z \longrightarrow Y$$

zwei Morphismen von k-Varietäten. Weiter seien A, B und C die affinen[48] k-Algebren

$$A := k[X],\ B := k[Y],\ C := k[Z]$$

und

$$a := p^*: A \longrightarrow C,\ b := q^*: B \longrightarrow C$$

die durch p bzw. q induzierten k-Algebra-Homomorphismen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

---

[48] d.h. die k-Algebren sollen endlich erzeugt und radikal sein (vgl. 1.3.1).

(a) Z ist ein Produkt von X und Y mit den natürlichen Projektionen p und q.

(b) Die Abbildung

$$c: A \times B \longrightarrow C,\ (x, y) \mapsto a(x)\bullet b(y),$$

ist bilinear über k und jede über k bilineare Abbildung der Gestalt

$$c': A \times B \longrightarrow C',\ (x, y) \mapsto a'(x)\bullet b'(y),$$

mit k-Algebra-Homomorphismen

$$a': A \longrightarrow C',\ b': B \longrightarrow C'$$

und mit Werten in einer affinen k-Algbra C' faktorisiert sich eindeutig über c, d.h. es gibt genau einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{c}': C \longrightarrow C',$$

für welchen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\tilde{c}} & C' \\ c\uparrow & \nearrow c' & \\ A\times B & & \end{array}$$

kommutativ ist (es gilt $c' = \tilde{c}'\circ c$).

(iii) Die Universalitätseigenschaft des Tensorprodukts der k-Algebra $A\otimes_k B$ sorgt dafür, daß mit $C := A\otimes_k B$ die Bedingungen von (ii) erfüllt sind, solange man von der Forderung absieht, daß C affin sein soll. Diese Forderung ist aber auf Grund der nachfolgenden Aussage 1.5.2 (i) ebenfalls erfüllt.

(iv) Identifiziert man die Punkte von affinen k-Varietäten mit den maximalen Idealen der zugehörigen Koordinatenringe (vgl. 1.3.3), so ist das maximale Spektrum

$$\text{Specm } A\otimes_k B \text{ mit } A = k[X] \text{ und } B = k[Y]$$

gerade die Menge der Punkte eines Produkts der affinen k-Varietäten X und Y. Die natürlichen Projektionen des Produkts sind dann induziert durch die (injektiven) k-Algebra-Homomorphismen

$$p^*: A \hookrightarrow A\otimes_k B,\ a \mapsto a\otimes 1, \text{ bzw. } q^*: B \hookrightarrow A\otimes_k B,\ b \mapsto 1\otimes b.$$

Die Projektionen selbst haben damit die Gestalt

$$p: \text{Specm } A\otimes_k B \longrightarrow \text{Specm } A,\ P \mapsto A\cap P := (p^*)^{-1}(P),$$

$$q: \text{Specm } A\otimes_k B \longrightarrow \text{Specm } B,\ P \mapsto B\cap P := (q^*)^{-1}(P).$$

Die durch durch p und q definierte Abbildung

$$\alpha: \text{Spec } A\otimes_k B \longrightarrow \text{Specm } A \times \text{Specm } B,\ P \mapsto (A\cap P, B\cap P),$$

wobei rechts das mengentheoretische Produkt der beiden maximalen Spektren stehe, ist bijektiv und hat die Umkehrung

$$\beta: \text{Specm } A \times \text{Specm } B \longrightarrow \text{Specm } A\otimes_k B,\ (P, Q) \mapsto A\otimes_k Q + P\otimes_k B.$$

Beweis von (ii). <u>Beweis von</u> (a) ⇒ (b).

Die Abbildung c ist k-bilinear, weil a und b Homomorphismen von k-Algebren sind: für $x, x', x''\in A$, $y, y', y'' \in B$ und $\lambda\in k$ gilt

$$\begin{aligned} c(x'+x'', y) &= a(x'+y')\bullet b(y) \\ &= (a(x')+a(y'))\bullet b(y) \\ &= a(x')\bullet b(y) + a(x'')\bullet b(y) \\ &= c(x', y) + c(x'', y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c(x, y'+y'') &= c(x,y') + c(x,y'') && \text{(wird in analoger Weise gezeigt)}\\
c(\lambda\bullet x, y) &= a(\lambda\bullet x)\bullet b(y)\\
&= \lambda\bullet a(x)\bullet b(y)\\
&= \lambda\bullet c(x,y)\\
c(x, \lambda\bullet y) &= \lambda\bullet c(x,y) && \text{(wird in analoger Weise gezeigt)}
\end{aligned}$$

Sei jetzt eine k-bilineare Abbildung

$$c'\colon A \times B \longrightarrow C',\ (x,y) \mapsto a'(x)\bullet b'(y),$$

mit Werten in einer affinen k-Algebra C' gegeben, wobei

$$a'\colon A \longrightarrow C',\ b'\colon B \longrightarrow C'$$

k-Algebra-Homomorphismen sind. Wir haben zu zeigen, c' faktorisiert sich eindeutig über c.

Man beachte, die Homomorphismen a' und b' lassen sich aus c' wiedergewinnen:

$$c'(x, 1) = a'(x)\bullet b'(1) = a'(x)\bullet 1 = a'(x)$$
$$c'(1,y) = a'(1)\bullet b'(y) = 1\bullet b'(y) = b'(y),$$

sind also durch c' eindeutig festgelegt. Als affine k-Algebra hat C' hat die Gestalt

$$C' = k[Z']$$

mit einer affinen k-Varietät Z'. Die k-Algebra-Homomorphismen a', b' induzieren Morphismen von k-Varietäten

$$p' := a'^{\#}\colon Z' \longrightarrow X \text{ und } q' := b'^{\#}\colon Z' \longrightarrow Y.$$

(vgl. Bemerkung 1.4.7 (iv)). Weil Z ein Produkt von X und Y mit den natürlichen Projektionen p und q ist, gibt es genau einen Morphismus von k-Varietäten $r\colon Z' \longrightarrow Z$, für welchen das Diagramm (1) kommutativ ist. Insbesondere hat man kommutative Dreiecke

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "r"] \arrow[d, "p'"'] & Z \arrow[dl, "p"] \\ X & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q'"'] & Z \arrow[dl, "q"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Wir gehen zu den induzierten Abbildungen auf den Koordinatenringen über und erhalten Kommutative Diagramm von k-Algebra-Homomorphismen

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tilde{c}'"] & C' \\ A \arrow[u, "a"] \arrow[ur, "a'"'] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tilde{c}'"] & C' \\ B \arrow[u, "b"] \arrow[ur, "b'"'] & \end{tikzcd} \qquad (2)$$

(vg. Bemerkung 1.4.7 (vi)). Es folgt

$$\begin{aligned}
c'(x,y) &= a'(x)\bullet b'(y) && \text{(Definition von c')}\\
&= \tilde{c}'(a(x))\bullet \tilde{c}'(b(y)) && \text{(Kommutativität der Dreiecke (2))}\\
&= \tilde{c}'(a(x)\bullet b(y)) && (\tilde{c}' \text{ ist k-Algebra-Homomorphismus})\\
&= \tilde{c}'(c(x,y))
\end{aligned}$$

d.h. c' faktorisiert sich über c. Wäre die Faktorisierung nicht eindeutig, so würde es einen zweiten k-Algebra-Homomorphismus wie $\tilde{c}'$ geben, sagen wir $\tilde{d}'\colon C \longrightarrow C'$. Die Dreiecke (2) wären dann auch für $\tilde{d}'$ anstelle von $\tilde{c}'$ kommutativ (man setze x = 1 bzw. y = 1). Dann wäre aber das Diagramm (1) auch für

$$s = \tilde{d}'^{\#}\colon Z' \longrightarrow Z,$$

anstelle von r kommutativ, d.h. r wäre nicht eindeutig bestimmt und Z kein Produkt von X und Y. Dieser Widerspruch zeigt, daß Bedingung (b) erfüllt sein muß.

<u>Beweis von</u> (b) $\Rightarrow$ (a).

Seien $p: Z \longrightarrow X$ und $q: Z \longrightarrow Y$ zwei solche Morphismen affiner k-Varietäten, daß Aussage (b) für die induzierten k-Algebra-Homomorphismen

$$a := p^*: A := k[X] \longrightarrow k[Z] =: C \text{ und } b := q^*: B := k[Y] \longrightarrow k[Z]$$

gilt.
Wir haben zu zeigen, daß dann Z ein Produkt der affinen k-Varietäten X und Y ist. Seien also zwei Morphismen affiner k-Varietäten

$$p': Z' \longrightarrow X \text{ und } q': Z' \longrightarrow Y$$

gegeben. Wir setzen

$$C' := k[Z']$$

und bezeichen die auf den Koordinatenringen induzierten k-Algebra-Homomorphismen mit

$$a' := p'^*: A \longrightarrow C' \text{ bzw. } b' := q'^*: B \longrightarrow C'.$$

Die Abbildung

$$c': A \times B \longrightarrow C', (x, y) \mapsto a'(x) \bullet b'(y),$$

ist dann bilinear über k. Auf Grund der Voraussetzung (b) faktorisiert sich c' eindeutig über c, d.h. es gibt genau einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{c}': C \longrightarrow C' \text{ mit } c' = \tilde{c} \circ c.$$

Wir erhalten so einen Morphismus von affinen k-Varietäten

$$r := (\tilde{c}')^{\#}: Z' \longrightarrow Z.$$

Wegen $c' = \tilde{c} \circ c$ gilt

$$a'(x) = c'(x, 1) = \tilde{c}'(c(x,1)) = \tilde{c}'(a(x)) \text{ und } b'(y) = c'(1,y) = \tilde{c}'(c(1,y)) = \tilde{c}'(b(x))$$

also

$$a' = \tilde{c}' \circ a \text{ und } b' = \tilde{c}' \circ b,$$

d.h. wir erhalten kommutative Diagramme (2). Wir gehen zu den zugehörigen Morphismen affiner k-Varietäten über und erhalten kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "r"] \arrow[d, "p'"'] & Z \arrow[dl, "p"] \\ X & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q'"'] & Z \arrow[dl, "q"] \\ Y & \end{tikzcd} \tag{3}$$

und damit ein kommutatives Diagramme (1). Damit existiert ein Morphismus r wie in der Produkt-Definition gefordert. Wir haben noch seine Eindeutigkeit zu beweisen. Angenommen, es gibt einen weiteren solchen Morphismus wir r, sagen wir

$$s: Z' \longrightarrow Z.$$

Dann sind die beiden Dreiecke (3) auch mit s anstelle von r kommutativ. Sei

$$\tilde{d}' := s^*: C \longrightarrow C'$$

der induzierte k-Algebra-Homomorphismus auf den Koordinatenringen. Dann sind die Diagramm (2) für $\tilde{d}'$ anstelle von $\tilde{c}'$ kommutativ, d.h. es:

$$a' = \tilde{d}' \circ a \text{ und } b' = \tilde{d}' \circ b,$$

und damit

$$c'(x, y) \quad = a'(x) \bullet b'(y) \qquad \text{(Definiton von c')}$$

$$= \tilde{d}'(a(x))\cdot \tilde{d}'(b(x)) \quad \text{(Wahl von } \tilde{d}')$$

$$= \tilde{d}'(a(x)\cdot b(x)) \quad (\tilde{d}' \text{ ist k-Algebra-Homomorphimus})$$

$$= \tilde{d}^*(c(x,y)) \quad \text{(Definition von c)}$$

also

$$c' = \tilde{d}'\circ c.$$

Die Faktorisierung von c' über c ist damit nicht eindeutig. Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung (b). Unsere Annahme, daß der Morphismus r nicht eindeutig bestimmt ist, muß falsch sein. Wir haben gezeigt, Z ist ein Produkt von X und Y mit den natürlichen Projektionen p und q.

Beweis von (iv).

1. Schritt. Die natürlichen Projektionen

$$\text{Specm } A\otimes_k B \longrightarrow \text{Specm } A \text{ und } q: \text{Specm } A\otimes_k B \longrightarrow \text{Specm } B$$

werden induziert durch die k-Algebra-Homomorphismen

$$p^*: A \longrightarrow A\otimes_k B,\ x \mapsto x\otimes 1, \text{ und } q^*: B \longrightarrow A\otimes_k B,\ y \mapsto 1\otimes y.$$

Nach (ii) erhält man aus p und q die induzierten k-Algebra-Homomorphismen

$$a := p^*: A \longrightarrow A\otimes_k B \text{ und } b := q^*: B \longrightarrow A\otimes_k B$$

dadurch, daß man in der bilinearen Abbildung

$$c: A\times B \longrightarrow A\otimes_k B,\ (x, y) \mapsto x\otimes y,$$

ein Argument gleich 1 setzt

$a(x) = c(x, 1) = x\otimes 1$

$b(y) = c(1,y) = 1\otimes y$

Wir haben hier den Koordinatenring $C = k[Z]$ des Produkts Z von X und Y entsprechend (iii) mit dem Tensorprodukt $A\otimes_k B$ identifiziert.

Wegen $p = (p^*)^\#$ und $q = (q^*)^\#$ (nach Bemerkung 1.4.7 (vi)) entstehen damit die beiden Morphismen p und q in der angegebenen Weise aus den k-Algebra-Homomorphismen a bzw. b.

2. <u>Schritt</u>. α ist wohldefiniert, d.h. $A\cap P$ ist ein maximales Ideal von A und $B\cap P$ ein maximales Ideale von B.

Wir beschränken uns darauf, zu zeigen, $A\cap P$ ist ein maximalen Ideal. Die Argumentation für $B\cap P$ ist analog.

Wegen $A\cap P = (p^*)^{-1}(P)$ induziert $p^*: A \hookrightarrow A\otimes_k B$ einen injektiven Homomorphismus von k-Algebren

$$(k \hookrightarrow)\ A/A\cap P \hookrightarrow A\otimes_k B/P \cong k,$$

wobei der Isomorphismus rechts besteht, weil P ein maximales Ideal ist. damit ist die Injektion auch surjektiv, es gilt $k \cong A/A\cap P$, d.h. $A\cap P$ ist maximales Ideal von A.

3. <u>Schritt</u>. β ist wohldefiniert, d.h. $A\otimes_k Q + P\otimes_k B$ ist ein maximales Ideal.

Außerdem sind α und β zueinander inverse Bijektionen,

$$\alpha\circ\beta = \text{Id und } \beta\circ\alpha = \text{Id}.$$

Für maximale Ideale P von A und Q von B gilt auf der Grund der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts

$$\begin{aligned}A\otimes_k B/(P\otimes_k B+A\otimes_k Q) &\cong (A\otimes_k B/\ P\otimes_k B)\ /\ (P\otimes_k B+A\otimes_k Q\ /\ P\otimes_k B)\\ &\cong (A/P)\otimes_k B\ /\ (A\otimes_k Q)\bullet\ (A/P)\otimes_k B\\ &= (A/P)\otimes_k B\ /\ (A/P)\otimes_k Q\\ &\cong (A/P)\otimes_k (B/Q)\\ &= k\otimes_k k, \qquad \text{(vgl. 1.3.3 (i) und Bemerkung von 1.3.2)}\\ &\cong k,\end{aligned}$$

d.h. $R:= P\otimes_k B+A\otimes_k Q$ ist ein maximalen Ideal von $A\otimes_k B$ und β ist wohldefiniert. Wegen

$A \cap R \supseteq P$ also $A \cap R = P$ (weil P maximal in A ist) und

$B \cap R \supseteq Q$ also $B \cap R = Q$(weil P maximal in A ist).

gilt

$$\alpha(\beta(P, Q)) = \alpha(A\otimes_k Q + P\otimes_k B) = (P, Q),$$

d.h. $\alpha\circ\beta = \mathrm{Id}$. Insbesondere ist α surjektiv und β ist injektiv.

Zum Beweis der verbleibenden Aussagen des dritten Schritts reicht es zu zeigen, daß β auch surjektiv ist. Dazu betrachten wir ein maximales Ideal R von $A\otimes_k B$. Nach dem zweiten Schritt sind

$$P := A\cap R = (p^*)^{-1}(R), \text{ und } Q := B\cap R = (q^*)^{-1}(R),$$

maximale Ideale von A bzw. B. Nach Definition von P und Q gilt

$$P\otimes 1 = p^*(P) = p^*((p^*)^{-1}(R)) \subseteq R$$

und

$$1\otimes Q = q^*(Q) = q^*((q^*)^{-1}(R)) \subseteq R$$

und weil R eine Ideal ist auch

$$\beta(P, Q) = P\otimes_k B + A\otimes_k Q = (P\otimes 1 + 1\otimes Q)\bullet A\otimes_k B \subseteq R.$$

Weil links ein maximales Ideal und rechts ein echtes Ideal steht, muß das Gleichheitszeichen gelten, d.h. das vorgegebene maximale Ideal R liegt im Bild von β. **QED**.

1.5.2 Lemma: Reduziertheit bzw Nullteilerfreiheit von $A\otimes_k B$

Seien A und B endlich erzeugte k-Algebren. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $A\otimes_k B$ ist reduziert, falls A und B es sind.

(ii) $A\otimes_k B$ ist nullteilerfrei, falls A und B es sind.

(iii) Seien $X \subseteq k^n$ und $X' \subseteq k^{n'}$ algebraische Mengen mit den Koordinatenringen

$$k[X] = k[T]/I(X) \text{ und } k[X'] = k[T']/I(X').$$

Dabei stehe T' für n' Unbestimmte $T'_1,\dots,T'_{n'}$. Dann gilt

$$k[X]\otimes_k k[X'] \cong k[T, T']/(I(X)\bullet k[T,T']+I(X')\bullet k[T,T']).$$

$$(f(T) \bmod I(X))\otimes(f'(T') \bmod I'(X)) \mapsto f(T)\bullet f'(T') \bmod I(X)\bullet k[T,T']+I(X')\bullet k[T,T'].$$

Es gibt eine algebraische Menge $Z \subseteq k^{n+n'}$ mit

$$I(Z) = I(X)\bullet k[T,T']+I(X')\bullet k[T,T']$$

Versieht man die algebraischen Mengen X, Y und Z mit der Zariki-Topologie und den zugehörigen Strukturgarben, so wird Z ein Produkt der k-Varietäten X und X'.

(iv) Bei der Isomorphie von (iii) entspricht das Element

$$f\otimes g \in k[X]\otimes_k k[X'] \text{ mit } f\in k[X] \text{ und } f'\in k[X']$$

der Abbildung

$$X\times X' \longrightarrow k,\ (x, x') \mapsto f(x)\cdot f'(x').$$

Beweis. Zu (i). Seien A und B reduziert und sei

$$\alpha := \sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i$$

ein nilpotentes Element von $A\otimes_k B$. Wir haben zu zeigen, dieses Element ist Null. Weil

$$x\otimes y \in A\otimes_k B$$

eine über k bilineare Funktion der Elemente $x \in A$ und $y \in B$ ist, können wir annehmen[49], die Elemente

$$b_1,\dots, b_n \in B \text{ sind linear unabhängig über k.}$$

Sei $h: A \longrightarrow k$ ein Homomorphismus von k-Algbren. Dann ist

$$h\otimes Id: A\otimes_k B \longrightarrow k\otimes_k B \cong B,\ a\otimes b \mapsto h(a)\otimes b \mapsto h(a)\cdot b$$

ebenfalls ein Homomorphismus von k-Algebren. Das Bild von α bei diesem Homorphismus ist ebenfalls nilpotent, also - da B reduziert ist - gleich Null:

$$0 = (h\otimes Id)(\alpha) = := \sum_{i=1}^{n} h(a_i)b_i$$

Weil die b_i linear unabhängig sind über k, folgt

$$h(a_i) = 0 \text{ für jeden k-Algebra-Homomorphismus } h: A \longrightarrow k.$$

Weil A eine reduzierte und endlich erzeugte k-Algebra ist, hat sie die Gestalt

$$A = k[X]$$

mit einer algebraischen Mengen $X \subseteq k^n$ (vgl. 1.3.1). Für jeden Punkt $x\in X$ ist die Auswertungsabbildung

$$A \longrightarrow k,\ a \mapsto a(x),$$

ein k-Algebra-Homomorphismus. Deshalb gilt

$$a_i(x) = 0 \text{ für jeden Punkt } x \in X \text{ und } i = 1,\dots, n.$$

Mit anderen Wort a_i ist als Element von $k[X] = A$ gleich 0 für jedes i. Dann ist aber auch α gleich Null.

Zu (iii). Nach (i) ist $k[X]\otimes_k k[X']$ reduziert (weil k[X] und k[X'] reduziert sind, also von der Gestalt

$$k[X]\otimes_k k[X'] \cong k[Z]$$

mit einer algebraischen Menge Z. Nach den Bemerkungen von 1.5.1 ist Z ein Produkt von X und X'. Mit

---

[49] Bei einer Linearen Abhängigkeit über k kann man eines der b_i als Linearkombination der anderen schreiben.

$$J := I(X)\bullet k[T,T']+I(X')\bullet k[T,T']$$

gilt

$k[T, T']/J \cong k[T]\otimes_k k[T'] / (I(X)\otimes_k k[T'] + k]T]\otimes_k I(X'))$

$\cong (k[T]\otimes_k k[T']/I(X)\otimes_k k[T']) / (I(X)\otimes_k k[T'] + k]T]\otimes_k I(X'))/ I(X)\otimes_k k[T']$

$\cong \frac{k[T]}{I(X)}\otimes_k k[T'] \;/\; k]T]\otimes_k I(X')\bullet \frac{k[T]}{I(X)}\otimes_k k[T']$ (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts)

$\cong \frac{k[T]}{I(X)}\otimes_k k[T'] / \frac{k[T]}{I(X)}\otimes_k I(X')$

$\cong \frac{k[T]}{I(X)} \otimes_k \frac{k[T']}{I(X')}$ (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts)

$\cong k[X] \otimes_k k[X']$

$\cong k[Z]$ (nach Wahl von Z)

Weil das Tensorprodukt reduziert ist (nach (i)), ist das Ideal J reduziert, d.h. es ist

$$J = I(Z).$$

Nach Konstruktion ist damit die zugehörige k-Varietät Z ein Produkt der k-Varietäten X und Y.

<u>Zu (ii)</u>. Seien A und B nullteilerfrei. Wir haben zu zeigen, daß

$$A\otimes_k B$$

nullteilerfrei ist.

Nach (i) ist $A\otimes_k B$ reduziert, also von der Gestalt

$$A\otimes_k B = k[Z]$$

mit einer algebraischen Menge Z. Es reicht zu zeigen,

Z ist irreduzibel.

Nach (iii) können wir annehmen, $Z \subseteq k^{n+n'}$ ist die algebraische Menge mit dem Ideal

$$I(Z) = I(X)\bullet k[T,T'] + I(Y)\bullet k[T,T'].$$

Insbesondere ist Z als Punktmenge von der Gestalt

$$Z = X\times Y,$$

wobei rechts das mengentheoretische Produkt von X und Y stehe.

Sei Z Vereinigung von zwei abgeschlossenen Teilmengen, sagen wir

$$Z = Z'\cup Z''.$$

Wir haben zu zeigen, $Z \subseteq Z'$ oder $Z \subseteq Z''$. Dazu betrachten wir die Mengen

$$X' := \{x \in X \mid \{x\}\times Y \subseteq Z'\} \text{ und } X'' := \{x \in X \mid \{x\}\times Y \subseteq Z''\}.$$

Diese Mengen sind abgeschlossen. Wir zeigen dies für X', der Beweis für X'' ist analog. Es gilt

$$X' = \bigcap_{y\in Y} Y_y \text{ mit } Y_y := \{x \in X \mid (x,y) \in Z'\}.$$

Jede der Mengen Y_y ist abgeschlossen, denn es ist

$$Y_y = \{(x,y) \in k^{n+n'} \mid f(x) = 0 \text{ und } g(x,y) \text{ für } f(T) \in I(X) \text{ und } g(T,T') \in I(Z')\}$$

Damit ist aber X' als Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen selbst abgeschlossen.

Wegen

$Y \cong \{x\}\times Y$

$= (\{x\}\times Y)\cap(Z'\cup Z'')$ (es gilt $\{x\}\times Y \subseteq X\times Y = Z = Z'\cup Z''$)

$$= ((\{x\}\times Y)\cap Z') \cup ((\{x\}\times Y)\cap Z'')$$

und weil Y irreduzibel ist, gilt

$$\{x\}\times Y = (\{x\}\times Y)\cap Z' \text{ oder } \{x\}\times Y = (\{x\}\times Y)\cap Z'$$

also

$$\{x\}\times Y = Z' \text{ oder } \{x\}\times Y \subseteq Z'$$

für jedes $x \in X$, also

$$X = X' \cup X''.$$

Weil X irreduzibel ist, folgt $X = X'$ oder $X = X''$. Im ersten Fall gilt

$$X\times Y \subseteq Z'$$

im zweiten ist

$$X\times Y \subseteq Z''.$$

Es gilt also $X\times Y = Z'$ oder $X\times Y = Z''$. Damit ist die Irreduzibilität von Z bewiesen, d.h.

$$A\otimes_k B = k[Z]$$

ist nullteilerfrei.

Zu (iv). Sei

$$J := I(X)\bullet k[T,T']+I(X')\bullet k[T,T'].$$

Für beliebige Polynome $f \in k[T]$ und $f' \in k[T']$ entspricht nach (iii) bei der Isomorphie

$$k[X]\otimes_k k[X'] \cong k[T, T']/(I(X)\bullet k[T,T']+I(X')\bullet k[T,T']).$$

das Elemente

$$f|_X \otimes f'|_{X'}, \text{ von } k[X]\otimes_k k[X']$$

dem Element

$$f(T)\bullet g(T')|_{X\times X'}, \text{ von } k[X\times X']$$

d.h. der Abbildung

$$X\times X' \longrightarrow k,\ (x, x') \mapsto f(x)\bullet f'(x').$$

QED

1.5.3 Aufgaben

(1) Man zeige, $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ besitzt Nullteiler.

(2) Man beweise, die Annahme in 1.5.2, daß A und B endlich erzeugte k-Algebren sind, kann weggelassen werden.

Bemerkung

Der Körper $\mathbb{R}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen. Die in den Aufgaben formulierten Aussagen stehen deshalb nicht im Widerspruch zu den Aussagen von 1.5.2.

Beweis. Zu (1). $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ ist ein 4-dimensionaler Vektorraum über den reellen Zahlen mit der Basis

$$1\otimes 1,\ 1\otimes i,\ i\otimes 1,\ i\otimes i.$$

Insbesondere sind

$$i\otimes 1 + 1\otimes i \text{ und } i\otimes 1 - 1\otimes i$$

von 0 verschiedene Elemente. Ihr Produkt ist jedoch Null:

$$(i\otimes 1 + 1\otimes i)\bullet(i\otimes 1 - 1\otimes i) = i^2\otimes 1 - 1\otimes i^2 = 0$$

Zu (2). Seien A und B beliebige k-Algebren und seien

A die Familie der endlich erzeugten Teilalgebren von A,
B die Familie der endlich erzeugten Teilalgebren von B,

und

$\mathbf{C}$ die Familie der Tensorprodukte $A'\otimes_k B'$ mit $A'\in\mathbf{A}$ und $B'\in\mathbf{B}$.

Dann gilt

$$A = \bigcup \mathbf{A}$$

$$B = \bigcup \mathbf{B}$$

und

$$A\otimes_k B = \bigcup \mathbf{C}$$

Deshalb ist $A\otimes_k B$ reduziert, wenn die Tensorprodukte von $\mathbf{C}$ es sind, und $A\otimes_k B$ ist nullteilerfrei, wenn die Tensorprodukte von $\mathbf{C}$ es sind. Deshalb gelten die Aussagen von 1.5.2 auch ohne die Annahmen, daß A und B endlich erzeugte k-Algebren sind.
QED.

1.5.4 Satz: Existenz und Erhaltung der Irreduzibilität

Seien X und Y zwei affine k-Varietäten

(i) Das Produkt $X\times Y$ existiert und ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und hat den affinen Koordinatenring $k[X]\otimes_k k[Y]$

(ii) $X\times Y$ ist irreduzibel, falls X und Y es sind.

Beweis. Zu (i). Die Aussage folgt aus 1.5.2 (i) mit $A = k[X]$ und $B = k[Y]$ und den Bemerkungen 1.5.1 (ii) und (iii).
Zu (ii). Die Aussage folgt aus 1.5.2 (ii) und dem zweiten Teil von Aussage (i).
QED.

1.5.5 Aufgaben

Aufgabe 1: Produkt-Varietät und Produkt-Menge

Zeigen Sie, die k-Varietät $X\times X'$ kann als Punktmenge mit dem Produkt der Mengen X und X' identifiziert werden.

Beweis. Siehe Bemerkung 1.5.1 (iv).
QED.

Aufgabe 2: Produkt- und Zariski-Topologie

Mit der Identifikation von Aufgabe 1 ist die Zariski-Topologie von $X\times X$ feiner also die Produkt-Topologie. Geben Sie ein Beispiel an, in welchen die beiden Topologien verschieden sind.

Beweis. Wir bezeichnen mit

S(X×X') die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X×X' bezüglich der Zariski-Topologie

S'(X×X') die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X×X' bezüglich der Produkt-Topologie.

Wir können o.B.d.A. annehmen,

$$X \subseteq k^n \text{ und } X' \subset k^{n'}$$

$$k[X] = k[T]/I(X) \text{ und } k[X] = k[T']/I(X')$$

1. Schritt. $S'(X\times X') \subseteq S(X\times X')$.

Die Produkt-Topologie von $X\times X'$ ist definiert als die gröbste Topologie, bei welcher die natürlichen Projektionen

$$X\times X' \longrightarrow X,\ (x,x') \mapsto x, \text{ und } X\times X' \longrightarrow X',\ (x,x') \mapsto x',$$

stetig sind. Das ist genau dann der Fall wenn die Mengen der Gestalt

$$F\times X' \text{ und } X\times F' \text{ mit F abgeschlossen in X und F' abgeschlossen in } X'$$

offen sind in $X\times X'$. Das bedeutet,

$S'(X\times X')$

besteht aus allen Mengen, die man durch Bilden von endlichen Vereinigungen und beliebigen Durchschnitten aus den Mengen der Gestalt $F\times X'$ und $X\times F'$ bilden kann.

Da in beliebigen topologischen Räumen endlichen Vereinigungen und beliebige Durchschnitte abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen überführen, reicht es zu zeigen

$F\times X' \in S(X\times X')$ und $X\times F' \in S(X\times X')$

für F abgeschlossen in X und F' abgeschlossen in X'.

Nach Voraussetzung haben F und F' die Gestalt

Die Elemente von $S'(X\times Y)$ sind die Durchschnitte von Mengen der Gestalt

$F\times F'$ mit F abgeschlossen in X und F' abgeschlossen in X'.

Als abgeschlossene Mengen von X bzw. X' haben F und F' die Gestalt

$$F = V_X(f_1, \dots , f_r) \quad \text{mit } f_1, \dots , f_r \in k[X]$$

$$F' = V_{X'}(f'_1, \dots , f'_{r'}) \quad \text{mit } f'_1, \dots , f'_{r'} \in k[X'].$$

Wir fassen die f_i und f'_j als Elemente des Polynomrings $k[T, T']$ auf und erhalten

$$F\times X' = V_{X\times X'}(f_1\otimes 1, \dots , f_r\otimes 1),$$

$$f_1\otimes 1, \dots , f_r\otimes 1\in k[X]\otimes_k k[X']=k[X\times X']$$

$$X\times F' = V_{X\times X'}(f'_1\otimes 1, \dots , f'_r\otimes 1),$$

$$1\otimes f'_1, \dots , 1\otimes f_r \in k[X]\otimes_k k[X']=k[X\times X']$$

Dies sind abgeschlossene Mengen von $X\times X'$ bezüglich der Zariski-Topologie, also Elemente von $S(X\times X')$.

2. <u>Schritt</u>. Ein Beispiel, in welchem die Inklusion des ersten Schritts echt ist.

Sei

$k[X] = k[t]$, $k[X'] = k[t']$ (t, t' zwei Unbestimmte).

Dann ist

$$k[X\times X'] \cong k[t]\otimes_k k[t'] \cong k[t,t']$$

Die abgeschlossenen Mengen von X sind außer X selbst nur die endlichen Teilmengen von X, wir können sie uns als endliche Teilmengen einer x-Achse vorstellen.[50]

Analog sind die abgeschlossenen Mengen von X' sind außer X' selbst nur die endlichen Teilmengen von X', wir können sie uns als endliche Teilmengen einer y-Achse vorstellen.

Die Mengen der Gestalt $F\times X'$ mit F endlich bestehen dann aus endlich vielen Geraden parallel zur y-Achse, die der Gestalt $X\times F'$ mit F' endlich aus endlich vielen Geraden parallel zur x-Achse.

Die Durchschnitte von solchen Mengen sind entweder wieder vom selben Typ oder endliche Punkt-Mengen.

Indem wir zu endliche Vereinigungen übergehen, erhalten wir insgesamt Mengen der folgendne Gestalt.

$$\{\text{endlich viele Punkte}\}\bigcup\{\text{endliche viele achsen-parallele Geraden}\}$$

---

[50] Polynome in ener Unbestimmten haben nur endlich viele Nullstellen (oder sind identisch Null).

und zusätzlich X×X' und ∅.
Endliche Vereinigungen von Mengen dieses Typs sind wieder Mengen dieses Typs. Beliebige Durchschnitte von Mengen dieses Typs sind wieder Mengen dieses Typs. Die Mengen dieses Typs sind deshalb gerade die abgeschlossenen Mengen der Produkt-Topologie.
Die Diagonale der xy-Ebene, d.h. die Nulltstellenmenge des Ideals

$$(t-t')\bullet k[t, t']$$

ist Zariski-abgeschlossen, aber nicht von diesem Typ, d.h.

S'(X×X') und S(X×X') sind verschieden.

QED.

Aufgabe 3: Produkt affiner F-Varietäten

Sei F ein Teilkörper von k. Dann existiert das Produkt zweier affiner F-Varietäten und ist bis auf einen F-Isomorphismus eindeutig bestimmt.
Beweis. Seien X und Y zwei affine F-Varietäten und

$$F[X] \subseteq k[X] \text{ und } F[Y] \subseteq k[Y]$$

die zugehörigen F-Strukturen auf deren affinen Koordinatenringen. Dann verwenden wir

$$F[X\times Y] := F[X]\otimes_F F[Y]$$

als F-Struktur auf dem affinen Koordinatenring

$$k[X\times Y] := k[X]\otimes_k k[Y]$$

von X×X.

F[X×Y] ist tatsächlich eine F-Struktur von k[X×Y], denn es gilt

$$\begin{aligned} k\otimes_F F[X\times Y] &= k\otimes_F F[X]\otimes_F F[Y] \\ &\cong k[X]\otimes_F F[Y] && \text{(F[X] ist F-Struktur von k[X])} \\ &\cong k[X]\otimes_k k \otimes_F F[Y] && \text{(k[X] ist ein k-Modul)} \\ &\cong k[X]\otimes_k k[Y] && \text{(F[Y] ist F-Struktur von k[Y])} \end{aligned}$$

Nach 1.4.9, Eigenschaften der $\mathcal{O}_X(U)(F)$, (ii) - (iv), ist die F-Struktur auf der affinen Varietät X×Y vollständig festgelegt.
QED.

Zum Geometrischen Hindergrund des Begriffs der affinen F-Varietät

Unsere Definition des Begriffs der affinen F-Varietät technisch technischer Natur. Es gibt jedoch einen einfachen geometrischen Hintergrund für diese Konstruktion. Eine Beschreibung dieses Hintergrunds erfordert eine Verallgemeinerung des Begriffs der affinen algebraischen Varietät, die selbst vergleichsweise technisch ist, die Bedeutung des Begriffs der F-Varietät und die Konstruktionen in diesem Kontext jedoch verständlicher macht. Wir beschränken uns auf einige Hinweise.

1. Schritt. Spektrum und maximales Spektrum einer endlich erzeugten reduzierten F-Algebra

Für jede endlich erzeugte reduzierte F-Algebra A betrachte man die Menge

$$\text{Specm } A$$

der maximalen Ideale und führe dort die Zariski-Topologie ein, deren abgeschlossene Mengen gerade die Mengen der Gestalt

$$V(M) := \{P \in \text{Specm } A \mid M \subseteq P\},\ M \subseteq A \text{ eine beliebige Teilmenge,}$$

haben. Die Konstruktion läßt sich für beliebige kommutative Ringe mit 1 ausführen (die nicht endlich erzeugt oder reduziert sein müssen). Es gibt nur ein Problem: nicht jeder Homomorphismus von Ringen mit 1, sagen wir

$$h: A \longrightarrow B$$

definiert eine Abbildung

$$h^{\#}:\text{Specm } B \longrightarrow \text{Specm } A,\ P \mapsto h^{-1}(P),$$

denn das Urbild eines maximalen Ideals von B muß maximal in A sein. Zum Beispiel für

$A := k[T]$ ein Polynomring und $B := k(T)$ dessen Quotientenkörper,

hat B das Nullideal als einziges maximales Ideal. Dessen Urbild in A ist nur maximalen, wenn die Anzahl der Unbestimmten T gleich 0 ist. Deshalb ist es sehr viel bequemer, anstelle des maximalen Spektrum Specm A das Spektrum

$$\text{Spec } A$$

aller Primideale zu betrachten und die Zariski-Topologie in der analogen Weise zu definieren, die Mengen der Gestalt

$$V(M) := \{P \in \text{Spec } A \mid M \subseteq P\},\ M \subseteq A \text{ eine beliebige Teilmenge},$$

sind dann gerade die abgeschlossenen Mengen. Die Eigeschaften dieser V(M) sind dann im wesentlichen dieselben wie im von uns betrachteten Spezielfall. Jeder Homomorphismus $h: A \longrightarrow B$ von Ringen mit 1 definiert dann eine stetige Abbildung

$$h^{\#}: \text{Spec } B \longrightarrow \text{Spec } A,\ P \mapsto h^{-1}(P).$$

Der Stetigkeitsbeweis ist derselbe wie in unserem Spezialfall: man zeigt, es gilt

$$(h^{\#})^{-1}(D(f)) = D(h(f)) \text{ für jedes } f \in A.$$

Allerdings hat man den Hilbertschen Nullstellensatz nicht zur Verfügung. Man kann deshalb die Mengen der Gestalt

$$\text{Spec } A$$

nicht mit den Nullstellenmengen polynomialer Gleichungssysteme identifizieren. Andererseits lassen sich viele Aussagen des von uns behandelten Spezialfalls auf den allgemeinen Fall übertragen. Zum Beispiel bilden die offenen Hauptmengen

$$D(f) := \text{Spec } A - V(f) \text{ mit } f \in A$$

eine Topologie-Basis und jede offene Menge von Spec A ist Vereinigung von endlich vielen offenen Hauptmengen, d.h. Spec A ist quasi-kompakt. Die natürliche Abbildung

$$A \longrightarrow A_f$$

in den Quotientenring induziert eine stetige Abbildung

$$\text{Spec } A_f \longrightarrow \text{Spec } A$$

mit dem Bild D(f) und

$$\text{Spec } A_f \longrightarrow D(f)$$

ist ein Homöomorphismus.Die meisten Beweise sind so ähnlich wie in unserem Spezialfall, oft sogar einfacher.

Wie im von uns betrachteten Spezialfall kann man die Mengen V(M) als Nullstellenmengen von Funktionen betrachten, die auf Spec A definiert sind. Für

$$f \in A \text{ und } P \in \text{Spec } A$$

setzt man

$$f(P) := f \bmod P \in A/P \subseteq \mathbf{Q}(A/P)$$

Der Wert von f an der Stelle P liegt im Quotientenkörper des Integritätsbereichs A/P. Allerdings kann der Wert f(P) für verschiedene P in verschiedenen Körpern liegen. Die durch f definierte Funktion, die oft auch mit f bezeichnet wird,

$$f: \text{Spec } A \longrightarrow \vee_{P\in\text{Spec } A} \mathbf{Q}(A/P),\ P \mapsto f(P),$$

hat Werte in der disjunkten Vereinigung aller Quotientenkörper der Gestalt $\mathbf{Q}(A/P)$ mit $P\in$Spec A. Das reicht für viele Fälle. Zum Beispiel gilt nach wie vor:

(i) $(fg)(P) = 0 \Rightarrow f(P) = 0$ oder $g(P) = 0$ (für beliebige $f,g \in A$).

(ii) $f(P) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in A_f$ definiert eine Funktion auf der Umgebung D(f) von P.

Allerdings ist ein Element $f \in A$ nicht nicht eindeutig festgelegt durch die zugehörige Abbildung auf Spec A. Alle nilpotenten Elemente von A definieren die Nullabbildung auf Spec A (da sie in jedem Primideal P von A liegt, gilt f(P) = 0 für alle P). Genauer kann man sagen,

Zwei Elemente $f, g \in A$ definieren genau dann dieselbe Funktion auf Spec A, wenn ihre Differenz im Nilradikal von A liegt,

$$f\text{-}g \in \sqrt{0} = \{x \in A \mid x \text{ ist nilpotent}\} =^{51} \bigcap \text{Spec } A.$$

Für reduzierte Ringe sind die Elemente von A durch deren zugehörige Funktionen auf Spec A festgelegt.

2. <u>Schritt</u>. Die Strukturgarbe eines Spektrums

In derselben Weise wie von uns durchgeführt, kann man auf

$$X = \text{Spec } A$$

eine Garbe definieren, die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ oder auch Garbe der regulären Funktionen auf den offenen Mengen von Spec A. Ist A reduziert, so kann man eine reguläre Funktion nach wie vor definieren als eine Funktion die lokal von der Gestalt

$$P \mapsto \frac{f(P)}{g(P)} \text{ mit } f, g \in A$$

ist, wobei g in einer Umgebung des betrachteten Punkts ungleich Null ist. Im allgemeinen Fall ist die Situation etwas schwieriger. Anstelle der Abbildung

$$P \mapsto f(P),$$

die jedem Punkt den Wert von f an der Stelle P zuordnet, muß man die "Potenzreihenentwicklung" von f in einer Umgebung von P betrachten. Eine reguläre Funktion ist dann eine Abbildung, die lokal von der Gestalt

$$P \mapsto \frac{f}{g} \in A_P \text{ mit } f, g \in A$$

ist, wobei g in einer Umgebung des betrachteten Punktes ungleich Null ist. Wie bisher ist dann

$$\mathcal{O}_X(X) = A \text{ und } \mathcal{O}_X(D(f)) = A_f \text{ für jedes } f \in A. \qquad (1)$$

Die Beweise findet man bei Hartshorne [1], Kapitel II, Abschnitt 2, Proposition 2.2 oder ausführlicher bei Shafarevich, I.R. [1], Kapitel V, §2, Abschnitt 2.

Ein geometrischer Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ mit X = Spec A, A ein kommutativer Ring mit 1 und $\mathcal{O}_X$ die eben konstruierte Strukturgarbe heißt <u>affines Schema</u>.

3.<u>Schritt</u>. Die Äquivalenz der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1 und der affinen Schemata.

Wie in 1.4.7 konstruiert man quasi-inverse Funktoren

$$(\text{ affine Schemata }) \underset{*}{\overset{\#}{\leftrightarrows}} (\text{kommutative Ringe mit 1})$$

---

[51] vgl. Matsumura [2], p. 3.

4. Schritt. Das Produkt zweier affiner Schemata über F

Mit Hilfe der Funktoren des dritten Schritt zeigt man, daß für je zwei Algebren A und B über einem Körper F das affine Schema

$$\mathrm{Spec}\ A\otimes_F B = \mathrm{Spec}\ A \times \mathrm{Spec}\ B$$

gerade das Produkt von Spec A und Spec B (in der Kategorie der affinen Schemata über F ist).

5. Schritt. F-Strukturen affiner Spektren über k als Faktoren von Faser-Produkten

Ist F ein Teilkörper von k, A_F eine F-Algebra und $A = k\otimes_F A_F$. So gilt in der Kategorie der affinen F-Schemata

(i) $\mathrm{Spec}\ A_F \times \mathrm{Spec}\ k = \mathrm{Spec}\ A$.

Sei A_F endlich erzeugt über F und A eine affine k-Algebra. Dann gilt zusätzlich

(ii) Ist A_F endlich erzeugt über F und A eine affine k-Algebra, so ist

$$X := \mathrm{Specm}\ A \subseteq \mathrm{Spec}\ A$$

(versehen mit Unterraum-Topologie und der Garbe $\mathcal{O}_X|_{\mathrm{Specm}\ A}$) gerade die affine k-Varietät mit dem Koordinatenring A.

(iii) Die F-abgeschlossenen Mengen von X bezüglich der F-Struktur A_F von A sind gerade die Mengen der Gestalt

$$(Y\otimes_F k) \cap \mathrm{Specm}\ A \text{ mit } Y = \mathrm{Spec}\ A_F/J,\ J \subseteq A_F \text{ ein Ideal.}$$

(iv) Die F-offenen Hauptmengen von X bezüglich der F-Struktur A_F von A sind gerade die Mengen der Gestalt[52]

$$((A_F)_f\otimes_F k) \cap \mathrm{Specm}\ A \text{ mit } f \in A_F \text{ ein Element.}$$

(v) Für die Strukturgarbe $\mathcal{O}_{X_F}$ von $X_F = \mathrm{Spec}\ A_F$ (bzw. $\mathrm{Specm}\ A_F$) und $f \in A_F$ gilt

$$\mathcal{O}_{X_F}(D(f)) = (A_F)_f\ .^{53}$$

Dies ist gerade die F-Struktur von $\mathcal{O}_X(D(f))$ bezüglich der F-Struktur von X bezüglich der F-Struktur A_F von A.

(vi) Auf Grund der Garben-Axiome für $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{O}_{X_F}$ ist wegen (v) für jede F-offene Menge U von X die F-Algebra

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\ A_F}(U)$$

gerade die F-Struktur von $\mathcal{O}_X$ (U) bezüglich der F-Struktur A_F von A.

---

[52] Man beachte

$$\begin{aligned}(A_F)_f\otimes_F k &= (A_F)_f\otimes_{A_F} A_F \otimes_F k && ((A_F)_f \text{ ist ein } A_F\text{-Modul})\\ &= (A_F)_f\otimes_{A_F} A && (A_F \text{ ist eine F-Struktur von A})\\ &= A_f && (\text{Quotientenmodul von A über } A_F \text{ bezüglich } \{f^n\})\end{aligned}$$

[53] Die offenen Hauptmengen D(f) von $\mathrm{Specm}\ A_F$ und D'(f) von $\mathrm{Spec}\ A_F$ bestimmen einander. Es gilt

$$D(f) = D'(f) \cap \mathrm{Specm}\ A_F \text{ und } D'(f) = \{P' \in \mathrm{Spec}\ A_F \mid P' \subseteq P \text{ für ein } P \in D(f)\ \}$$

QED.

1.6 Prävarietäten und Varietäten

1.6.0 Vorbemerkungen

(i) Eine allgemeine Erfahrung in Geometrie und Analysis besagt, daß viele tiefliegende Sätze auf den Eigenschaften kompakter Räume beruhen oder in irgendeiner Weise mit Kompaktheitsbedingungen verknüpft sind. In diesem Sinne haben die affinen Varietäten (über $\mathbb{C}$) einen Mangel: versehen mit der gewöhnlichen Topologie (anstelle der Zariski-Topologie) sind sie so gut wie nie kompakt. Die Verwendung der Ein-Punkt-Kompaktifizierung dieser Räume ist keine adequate Methode, diesen Mangel zu beheben, denn dabei geht die polynomiale Natur der affinen Varietäten verloren.

(ii) Die richtige Methode zur Behebung dieses Mangel (für Varietäten über $\mathbb{C}$) bieten die projektiven Räume und die in ihnen enthaltenen projektiven Varietäten. Jede affine Varietät (über $\mathbb{C}$) liegt in einer projektiven Varietät. Letztere ist kompakt und ist in einem geeigneten projektiven Raum Nullstellenmenge von Polynomen.

(iii) Über beliebigen Körpern steht die gewöhnliche Topologie nicht zur Verfügung. Wenn wir topologische Argumente verwenden wollen, müssen wir uns meistens mit der Zariski-Topologie begnügen. Affine Varietäten sind in der Zariki-Topologie zwar (quasi-) kompakt, trotzdem sind die meisten Sätze, die wir mit der Kompaktheit verbinden, für affine Varietäten falsch. Der Satz von Liouville, daß jede komplex-analytische Funktion auf einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit (zum Beispiel auf der Riemannschen Zahlenkugel) konstant ist, hat für affine Varietäten kein Analogon.

(iv) Um solche Sätze wie den Satz von Liouville auf den Fall algebraischer Varietäten zu übertragen und zwar über beliebigen Körpern, für die nur die Zariski-Topologie zur Verfügung steht, ist der gewöhnliche Kompaktheitsbegriff ungeeignet. Wir müssen statt dessen eine Bedingung im Rahmen der Zariki-Topologie finden, die der Kompaktheitsforderung in der gewöhnlichen Topologie entspricht. Ein solcher Begriff ist der Begriff der vollständigen Varietät[54] oder auch eigentlichen Varietät[55]. Vollständige Varietäten haben die Eigenschaft, daß jeder auf ihnen definierte Morphimus abgeschlossene Teilmengen in abgeschlossene Teilmengen überführt[56], so wie stetige Abbildungen kompakte Mengen in kompakte Mengen überführen. Sehen wir uns ein einfaches Beisspiel an, um die Verbindung zum Kompaktheitsbegriff zu illustrieren.

(v) Sei X die Hyperbel, welche in der affinen Ebene die Gleichung

$$x\bullet y - 1 = 0$$

besitzt. Das Bild der Hyperbel bei der Projektion auf die x-Achse ist die x-Achse ohne den Ursprung. Das Bild der abgeschlossenen Teilmenge X der Ebene ist eine Menge, welche nicht abgeschlossen ist. Der fehlende Ursprung ist ein Hinweis darauf, daß die Hyperbel in der affinen Ebene eine “unvollstängige” Kurve ist. Ihr fehlt ein Punkt, nämlich der Punkt in unendlicher Ferne in Richtung der y-Achse, welche bei der Projektion in den Ursprung übergeht. Nach Hinzufügen dieses Punktes, würde immer noch ein Punkt fehlen: im Bild der Hyperbel bei einer Projektion auf die y-Achse fehlt ebenfalls der Urspung. Es ist ein weiterer Punkt in unendlicher Ferne in Richtung der x-Achse zur Hyperbel hinzuzufügen. Damit die Projektionen auf die Achsen weiterhin möglich sind, muß man auch zu den beiden Koordinaten-Achsen jeweils einen unendlich fernen Punkt hinzufügen. Dabei kann man die “vervollstängigten” Kurven so mit einer Topologie versehen, daß sie kompakt werden (sowohl in der Zariski-Topologie als auch - über $\mathbb{C}$ der gewöhnlichen Topologie). Die beiden Koordinaten

[54] Englisch: complete variety.

[55] Englisch: proper variety.

[56] Die genaue Definition der vollständigen Varietät verschieben wir auf einen späteren Zeitpunkt.

Achsen und die Hyperbel werden so zu “projektiven Geraden” (über $\mathbb{C}$ zu Riemannschen Zahlenkugeln). Bei einem geeigneten Koordinatenwechsel bekommt die Hyperbel die Gleichung einer Ellipse. Aus der Sicht der projektiven Geometrie gibt es keinen Unterschied zwischen Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln. Alle “vervollständigten” Kurven sind über $\mathbb{C}$ kompakte topologische Räume in der gewöhnlichen Topologie. Die Aussage, daß im Bild einer solchen Kurve kein Punkt fehlen kann, entspricht gerade der Aussage, das stetige Bilder kompakter Menge ist kompakt sind.

(vi) Einer der grundlegenden Sätze der algebraischen Geometrie besagt, daß projektive Projektive Räume und ihre abgeschlossenen Teilmengen vollständig sind (sowohl in der Zariski-Topologie als auch über $\mathbb{C}$ in der gewöhnlichen Topologie). Um die Stellung der projektiven Varietäten in der algebraischen Geometrie besser zu verstehen werden wir sie als spezielle geometrische Räume definieren. Wir beginnen mit allgemeineren Konstrukten: den Varietäten.

(vii) Zunächst definieren wir Prävarietäten als geometrische Räume, die lokal so aussehen wie affine Varietäten. Wir folgen dabei der Sichtweise die zum Begriff der Mannigfaltigkeit führt: Mannigfaltigkeiten sind topologische Räume, die lokal so aussehen wie offene Mengen im $\mathbb{R}^n$. So wie die offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ die lokalen Modelle für die Mannigfaltigkeit sind, so sind die affinen Varietäten die lokalen Modelle der Prävarietäten. Prävarietäten entstehen, indem man affine Varietäten zusammenkleben. Die Vorsilbe “Prä-” kommt daher, daß beim Zusammenkleben Objekte entstehen können, die man lieber ausschließen würde. Zum Beispiel kann man zwei Exemplare der reellen x-Achse zusammenkleben, indem man alle einander entsprechende Punkte identifiziert - mit Ausnahme der beiden Ursprünge. Man erhält so eine reelle Gerade mit zwei Ursprüngen. Sie sieht lokal so aus wie ein offenes Intervall, ist jedoch kein Hausdorff-Raum. Bei der Betrachtung von Mannigfaltigkeiten beschränkt man sich normalerweise auf Hausdorff-Räume. Wir gehen bei unseren Konstruktionen in derselben Weise vor: Varietäten werden als Prävarietäten definiert, die einer zusätzlichen Bedingung genügen, die dafür sorgt, daß affine Räume mit verdoppelten Ursprung keine Varietäten sind (wohl aber Prävarietäten). Wir können dabei nicht fordern, daß Varietäten Hausdorff-Räume sein sollen. So gut wie kein topologischer Raum, der mit der Zariski-Topologie versehen ist, ist ein Hausdorff-Raum. Wie beim Begriff der Kompaktheit brauchen wir eine Bedingung, die in der Zariski-Topologie dieselbe Rolle spielt, wie in der gewöhnlichen Topologie über $\mathbb{C}$ die Hausdoff-Bedingung. Projektive Varietäten werden wir dann als spezielle Varietäten definiert.

1.6.1 Prävarietäten

Eine Prävarietät ist ein quasi-kompakter geometrischer Raum X mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt von X eine offene Umgebung U besitzt, für welche der geometrische Raum U mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X|_U$ (vgl. 1.4.7) isomorph ist zu einer affinen k-Varietät. Eine solche offene Menge U heißt auch affine offene Teilmenge von X und der geometrische Raum U mit der Garbe $\mathcal{O}_X|_U$ auch affiner offener Unterraum von X. Unter einem Morphismus von Prävarietäten versteht man einen Morphismus der zugrundeliegenden geometrischen Räume. Eine Teil-Prävarietät einer Prävarietät ist ein geometrischer Unterraum, welcher isomorph ist zu einer Prävarietät.

Der Begriff des Produkts von Prävarietäten ist in kategorialer Weise definiert, d.h. das Produkt von zwei Prävarietäten ist definiert als Prävarietät, welche als Objekt der Kategorie der Prävarietäten (und der oben beschriebenen Morphismen) gerade das Produkt der beiden Ausgangs-Prävarietäten in dem Sinne ist, daß sie in der Kategorie der Prävarietäten die in 1.5.1 beschriebene Universalitätseigenschaft besitzt.

1.6.2 Aufgaben

1.6.2 Aufgabe 1

Eine Prävarietät ist ein noetherscher topologischer Raum.

Beweis. Sei X eine Prävarietät. Nach Definition gibt es eine offene Überdeckung von X durch affine offene Teilmengen. Weil die Prävarietät X quasi-kompakt ist, reichen zum Überdecken bereits endlich viele affine offene Mengen aus, sagen wir

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n \text{ , } U_i \text{ affine offene Teilmenge von X für } i = 1,\ldots, n.$$

Sei $\{F_i\}_{i\in I}$ eine Familie von abgeschlossenen Teilmengen von X. Wir haben zu zeigen, die Familie enthält ein minimales Element bezüglich der Relation "$\subseteq$" (vgl. Bemerkung 1.1.5 (i) und Aussage 1.1.5 (ii)). Wir führen des Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang n =1.

Im Fall n = 1 ist X eine affine k-Varietät und als solch ein noetherscher topologischer Raum (vgl. 1.1.5 (ii)).

Induktionsschritt.

Wir nehmen an, die Aussage ist richtig für Vereinigungen von weniger als n affinen offenen Teilmengen, und haben sie für Vereinigungen von n affinen offenen Teilmengen U_v zu beweisen.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es in der Familie der

$$F_i \cap(U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}) \tag{1}$$

ein minimales Element, sagen wir für $i = i_0$. Falls F_{i_0} in der Familie der F_i minimal ist, haben wir nichts weiter zu beweisen. Sei also F_{i_0} nicht minimal in dieser Familie. Dann gibt es ein F_{i_1} welches echt enthalten ist in F_{i_0} ,

$$F_{i_1} \subset F_{i_0} \tag{2}$$

Weil $F_{i_0} \cap(U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1})$ minimal ist in der Familie der Mengen (1), muß

$$F_{i_1} \cap(U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}) = F_{i_0} \cap(U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1})$$

gelten. Wegen (2) und

$$F_i = F_i \cap X = F_i \cap(U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}) \cup F_i \cap U_n$$

muß dann aber die Inklusion $F_{i_1} \cap U_n \subseteq F_{i_0} \cap U_n$ echt sein, d.h. es gilt

$$F_{i_1} \cap U_n \subset F_{i_0} \cap U_n. \tag{3}$$

Falls F_{i_1} in der Familie der F_i minimal ist, haben wir nichts weiter zu beweisen. Andernfalls können wir die obige Argumentation mit F_{i_1} anstelle von F_{i_0} wiederholen und finden ein F_{i_2} für welches anstelle von (2) und (3) gilt

$$F_{i_2} \subset F_{i_1} \subset F_{i_0} \text{ und } F_{i_2} \cap U_n \subset F_{i_1} \cap U_n \subset F_{i_0} \cap U_n.$$

Falls auch F_{i_2} in der Familie der F_i nicht minimal ist, können wir beide Ketten weiter verlängern. Nun ist U_n als affine offene Teilmenge ein noetherscher topologischer Raum. Die zweite Kette ist deshalb nur endlich oft verlängerungsfähig. Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab, was nur dann eintritt, wenn das gefundene F_{i_ν} minimal in der Familie der F_i ist.

QED.

1.6.2 Aufgabe 2[57]

Für einen topologischen Raum X sind die folgenden Aussagen äquivalent.
1. X ist irreduzibel.
2. Je zwei nicht-leere offene Teilmengen von X schneiden sich.
3. Jede nicht-leere offene Menge U von X liegt dicht in X.

Beweis. Es bestehen die folgenden Implikationen.

X ist reduzibel $\Leftrightarrow$ X = X' $\cup$ X" mit X', X" echt und abgeschlossen in X

$\Leftrightarrow$[58] $\emptyset$ = U'$\cap$U" mit U', U" nicht-leer und offen in X

Damit gilt auch

X ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ je zwei nicht-leere offene Teilmengen U', U" von X schneiden sich

$\Leftrightarrow$ für jedes nicht-leere offene Teilmenge U' von X ist der Durchschnitt mit jeder offenen Teilmenge U" von X nicht leer

$\Leftrightarrow$ jede offene Teilmenge U' von X liegt dicht in X.

QED.

1.6.3 Aufgabe 3

Ist X eine irreduzible Prävarietät und U eine affine offene Teilmenge, so ist auch U irreduzibel.

Beweis. Je zwei nicht-leere offene Teilmengen U' und U" von U sind auch nicht-leere offene Teilmengen von X. Weil X irreduzibel ist haben U' und U" einen nicht-leeren Durchschnitt (nach Aufgabe 2). Ebenfalls nach Aufgabe 2 ist deshalb U irreduzibel.
Allgemeiner gilt, jede offene Teilmenge eines irreduziblen Raums ist irreduzibel.
QED.

1.6.3 Existenz und Eindeutigkeit des Produkts

Das Produkt von je zwei Prävarietäten über k existiert und ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien

X und Y

---

[57] Diese Aufgabe fehlt im Original. Sie wurde hier eingeführt, um den Beweis von Aufgabe 3 zu erleichtern.

[58] Folgt duch Übergang zu den Komplementen.

zwei Prävarietäten über k.
1. Schritt. Beweis der Eindeutigkeit des Produkts bis auf Isomorphie.
Seien Z und Z' zwei Produkte von X und Y über k mit den natürlichen Projektionen

$$p: Z \longrightarrow X \text{ und } q: Z \longrightarrow Y \text{ bzw } p': Z' \longrightarrow X \text{ und } q': Z' \longrightarrow Y.$$

Auf Grund der Universalitätseigenschaften der beiden Produkte gibt es (eindeutig bestimmte) Morphismen

$$r = (p, q): Z \longrightarrow Z' \text{ und } r' = (p', q'): Z' \longrightarrow Z,$$

für welche die Diagramme

$$\begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "q'"] & \\ X & & Y \\ & Z \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "q"'] \arrow[uu, "r"] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \\ & Z' \arrow[ul, "p'"] \arrow[ur, "q'"'] \arrow[uu, "r'"] & \end{tikzcd}$$

kommutativ sind. Durch Zusammensetzen dieser Diagramme erhält man kommatative Diagramme

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \\ & Z \arrow[ul, "p"] \arrow[ur, "q"'] \arrow[uu, "r'\circ r"] & \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} & Z' \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "q'"] & \\ X & & Y \\ & Z' \arrow[ul, "p'"] \arrow[ur, "q'"'] \arrow[uu, "r\circ r'"] & \end{tikzcd}$$

welche kommutativ bleiben, wenn man die vertikalen Morphismen in der Mitte durch die identischen Morphismen ersetzt. Wegen der Eindeutigkeitsaussage der Universalitätseigenschaft des Produkts folgt

$$r'\circ r = \mathrm{Id} \text{ und } r\circ r' = \mathrm{Id},$$

d.h. r und r' sind zueinander inverse Isomorphismen.

Wir wenden uns jetzt dem Beweis der Existenz des Produkts zu.
2. Schritt. Beschreibung des Produkts von X und Y als topologischen Raum.

Sei

$$Z = X\times Y := \{(x,y) \mid x\in X \text{ und } y\in Y\}$$

das mengentheoretische Produkt der Mengen X und Y. Als Prävarietäten über k werden X und Y von affinen offenen Hauptmengen überdeckt. Deshalb wird

$$X\times Y$$

überdeckt von Mengen der Gestalt

$$U\times V \text{ mit U offen affin in X, V offen affin in Y.}$$

Jede diesser Mengen besitzt die Struktur einer affinen k-Varietät mit dem Koordinatenring $k[U]\otimes_k k[V]$ und der zugehörigen Strukturgarbe $\mathcal{O}_{U\times V}$. Insbesondere sind die Mengen $U\times V$ topolgische Räume.

Die Topologie von $X\times Y$.

Wir führen eine Topologie auf $X\times Y$ ein, deren offene Teilmengen gerade aus denjenigen Teilmengen von $X\times Y$ bestehen, deren Durchschnitte mit allen Menge dieser Gestalt $U\times V$ offen sind in $U\times V$

$$W \subseteq X\times Y \text{ offen in } X\times Y \quad \Leftrightarrow W\cap(U\times V) \text{ offen in } U\times V$$
$$\text{für U offen affin in X und V offen affin in Y}$$

Nach dieser Festlegung sind $X\times Y$ und die leere Menge offen in $X\times Y$. Der Durchschnit zweier offener Mengen von $X\times Y$ ist danach offen in $X\times Y$, und dasselbe gilt für eine beliebige Vereinigung offener Teilmengen von $X\times Y$. Es ist also auf diese Weise tatsächlich eine Topologie auf $X\times Y$ definiert.

Offenheit von $U\times V$ in $X\times Y$ für U offen affin in X und V offen affin in Y.
Seien

U, U' affine offene Mengen von X und
V, V' affine offene Mengen von Y.

Dann ist $U\cap U'$ offen in $U = \mathrm{Specm}\, A$, also Vereinigung offener Hauptmengen,

$$U\cap U' = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Specm}\, A_{f_i} \text{ mit } f_i \in A,$$

und $V\cap V'$ ist offen in $V = \mathrm{Specm}\, B$, also Vereinigung offener Hauptmengen

$$V\cap V' = \bigcup_{j\in J} \mathrm{Specm}\, B_{g_j} \text{ mit } g_j \in B,$$

Damit sind die Mengen

$$(U\times V)\cap(U'\times V') = (U\cap U')\times(V\cap V')$$

Vereinigung der offenen Hauptmengen

$$\begin{aligned}\mathrm{Specm}\, A_{f_i} \times \mathrm{Spec}\, B_{g_j} &= \mathrm{Specm}\, A_{f_i} \otimes_k B_{g_j}\\ &= \mathrm{Specm}\, (A\otimes_k B)_{f_i\otimes g_j} \qquad \text{(vgl. Aufgabe 1.6.4)}\\ &= D(f_i\otimes g_j)\end{aligned}$$

also offen in $U\times V$. Da dies für alle U und alle V gilt, ist $U'\times V'$ offen in $X\times Y$, und zwar für alle U'.
Quasi-Kompaktheit von $X\times Y$.
Weil X und Y als Prävarietäten quasi-kompakt sind, besitzen sie endliche offene Überdeckungen

$$X = U_1\cup\ldots\cup U_m \text{ und } Y = V_1\cup\ldots\cup V_n$$

durch affine offene Teilmengen U_i von X bzw. V_j von Y. Es folgt

$$X\times Y = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} U_i\times V_j .$$

Als Produkte von affinen k-Varietäten besitzen die Produkte $U_i\times V_j$ ebenfalls die Struktur affiner k-Varietäten (vgl. Bemerkkung 1.5.1 (iii)). Sie sind damit insbesondere quasi-kompakt.
Wir haben gezeigt, $X\times Y$ ist Vereinigung von endlich vielen quasi-kompakten offenen Teilmengen (und damit ebenfalls quasi-kompakt).

3. Schritt. Einführung des Begriffs regulären Funktionen auf den offenen Teilmengen der Produktmenge $X\times Y$.

Seien $W \subseteq X\times Y$ eine offene Teilmenge von $X\times Y$ und $x \in W$ ein Punkt. Eine Funktion

$$f: W \longrightarrow k$$

wollen wir regulär im Punkt x nennen, wenn ihre Einschränkung auf

$$W\cap(U\times V)$$

im Punkt x regulär ist für eine affine offene Teilmenge U von X, eine affine offene Teilmenge V von Y, wobei U und V so gewählt sein sollen, daß x in $U\times V$ liegt, d.h. es soll eine offene Umgebung $W' \subseteq U\times V$ von x und Elemente

$$u, v \in k[U\times V] \; (= \mathcal{O}_{U\times V}(U\times V) = k[U]\otimes_k k[V] = \mathcal{O}_X(U)\otimes_Y(V))$$

geben mit

$$v(x') \neq 0 \text{ und } f(x') = \frac{u(x')}{v(x')} \text{ für jedes } x' \in W'.$$

In dieser Situation ist f automatisch regulär in allen Punkten von W', d.h. es gilt

$$f \in \mathcal{O}_{U\times V}(W').$$

Damit erhalten wir das folgende
<u>Kriterium der Regularität</u>.

Eine Funktion f: W $\longrightarrow$ k mit W offen in X×Y ist genau dann regulär im Punkt x, wenn es affine offene Mengen U von X, V von Ygibt und eine offene Menge W' von X×Y mit

$$x \in W' \subseteq U\times V \text{ und } f|_{W'} \in \mathcal{O}_{U\times V}(W').$$

4. <u>Schritt</u>. Die Bedingung der Regulärität einer Funktion in einem Punkt ist unabhängig von der speziellen Wahl der affinen offenen Teilmengen U und V von X bzw. Y. Genauer: ist die Bedingung für ein Paar affiner offener Mengen U und V mit

$$x \in U\times V$$

erfüllt ist, so ist sie es auch für jedes andere Paar solcher affiner offener Teilmengen von X bzw. Y.

Wir nehmen an, für das Paar affiner offener Mengen U und V von X bzw. Y sei die Bedingung erfüllt, d.h. es gelte

$$f|_{W'} \in \mathcal{O}_{U\times V}(W')$$

für eine offene Teilmenge W' von X×Y mit $x \in W' \subseteq U\times V$.

Sei ein weiteres Paar affiner offener Mengen U' von X und V' von Y mit

$$x \in U'\times V'$$

gegeben.

1. <u>Fall</u>: $U' \subseteq U$ und $V' \subseteq V$.

Dann gilt $U'\times V' \subseteq U\times V$ also

$$W'' := W' \cap (U'\times V') \subseteq W'$$

Das Bild von $f|_{W'}$ bei der Garben-Restriktion $\mathcal{O}_{U\times V}(W') \longrightarrow \mathcal{O}_{U\times V}(W'')$ ist

$$(f|_{W'})|_{W''} = f|_{W''},$$

d.h. es gilt

$$f|_{W''} \subseteq \mathcal{O}_{U\times V}(W''),$$

d.h. es gilt Funktionen $r, s \in k[U]\otimes_k k[V]$ mit

$$f(x') = \frac{r(x')}{s(x')} \text{ für alle } x' \in W'' \tag{1}$$

Wir schreiben r und s in der Gestalt

$$r = \sum_i u_i \otimes v_i \text{ und } s = \sum_j u'_j \otimes v'_j$$

mit

$$u_i, u'_j \in k[U] \text{ und } v_i, v'_j \in k[V]$$

Die Garben-Restriktionen $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U')$ und $\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(V')$ sind k-Algebra-Homomorphismen, induzieren also einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_X(U)\otimes_k \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U')\otimes_k \mathcal{O}_Y(V') = k[U']\otimes_k k[V'].$$

Das Bild von r und s bei diesem ist

$$r|_{U'\times V'} = \sum_i u_i|_{U'}\otimes v_i|_{V'} \text{ bzw. } s|_{U'\times V'} = \sum_j u'_j|_{U'}\otimes v'_j|_{V'}$$

(vg. 1.5.2 (iv)). Wegen W" $\subseteq$ U'×V' können wir in (1) Zähler und Nenner auf der rechten Seite durch deren Einschränkungen auf U'×V' ersetzen und erhalten Funktionen

$$r' := r|_{U'\times V'} \text{ und } s' := s|_{U'\times V'} \in k[U']\otimes_k k[V']$$

mit

$$f(x') = \frac{r'(x')}{s'(x')} \text{ für alle } x' \in W"$$

Aus der Regulariät von f bezüglich U und V folgt also die bezüglich U' und V'.

2. <u>Fall</u>. U $\subseteq$ U' und V $\subseteq$ V'

Weil f regulär ist bezüglich U und V, gibt es eine offene Umgebung W' $\subseteq$ U×V von x und Funktionen

$$r = \sum_i u_i\otimes v_i \text{ und}$$

$$s = \sum_j u'_j\otimes v'_j$$

mit $u_i, u'_j \in k[U]$, $v_i, v'_j \in k[V]$ und

$$f(x') = \frac{r(x')}{s(x')} \text{ für alle } x' \in W".$$

Diese Bedingung bleibt - wie wir gerade gesehen haben - erhalten, wenn wir U und V verkleinern. Da die offenen Hauptmengen in der Zariski-Topologie eine Topologie-Basis bilden, können wir annehmen, U und V sind offene Hauptmengen der affinen k-Varietäten U' bzw. V', sagen wir

$$U = D(a) \text{ mit } a \in k[U'] \text{ und } V = D(b) \text{ mit } b \in k[V'].$$

Dann sind die Koordinatenringe von U und V Quotientenringe der Koordinatenringe von U' bzw. V',

$$k[U] = k[U']_a \text{ und } k[V] = k[V']_b$$

Damit bekommen die Funktionen u_i, u'_j, v_i, v'_j die Getalt

$$u_i = \frac{\tilde u_i}{a^n},\ u'_j = \frac{\tilde u'_j}{a^n},\ v_i = \frac{\tilde v_i}{b^n},\ v'_j = \frac{\tilde v'_j}{b^n} \text{ mit } \tilde u_i, \tilde u'_j \in k[U'] \text{ und } \tilde v_i, \tilde v'_j \in k[V'].$$

Man beachte, da die Gesamtzahl der beteiligten Elemente endlich ist, können wir die auftreteden Brüche so erweitern, daß in den Nennern dieselbe Potenz von a bzw. b steht. Die Funktionen

$$r, s \in k[U]\otimes_k k[V] = k[U']_a\otimes_k k[V']_b$$

bekommen so die Gestalt

$$r = \sum_i \frac{\tilde u_i}{a^n}\otimes\frac{\tilde v_i}{b^n} \text{ bzw. } s = \sum_j \frac{\tilde u'_j}{a^n}\otimes\frac{\tilde v'_j}{b^n}$$

Wir identifizieren $k[U']_a\otimes_k k[V']_b$ mit $(k[U']\otimes_k k[V'])_{a\otimes b}$ (vgl. Aufgabe 1.6.4) und erhalten

$$r = \sum_i \frac{\tilde{u}_i \otimes \tilde{v}_i}{(a\otimes b)^n} \text{ und } s = \sum_j \frac{\tilde{u}'_j \otimes \tilde{v}'_j}{(a\otimes b)^n}$$

(Umkehrbarkeit der Abbildung α von 1.6.4), also ist für $x' \in W''$

$$f(x') = \frac{r(x')}{s(x')} = \frac{r'(x')}{s'(x')}$$

mit

$$r' = \sum_i \tilde{u}_i \otimes \tilde{v}_i \in k[U']\otimes k[V'] \text{ und } s' = \sum_j \tilde{u}_j \otimes \tilde{v}_j \in k[U']\otimes k[V'].$$

Trivialerweise gilt $W'' \subseteq U'\times V' \subseteq U\times V$. Aus der Regularität von f in x bezüglich U und V folgt damit auch die Regulärität von f in x bezüglich U' und V'.

2. Fall: U' und V' beliebig.
Es gilt

$$x \in (U\times V) \cap (U'\times V') = (U\cap U')\times(V\cap V').$$

Weil die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis der Zariski-Topologie bilden, gibt es offene Hauptmengen

$$D(a) \subseteq U\cap U' \text{ und } D(b) \subseteq V\cap V'$$

der affinen k-Varietäten U bzw. V mit

$$x \in D(a)\times D(b).^{59}$

Diese haben die Struktur einer affinen k-Varietät mit dem Koordinatenring $k[U]_a$ bzw $k[V]_b$. Es gibt also affine offene Teilmengen $U'' := D(a)$ von X und $V'' = D(b)$ von Y mit

$$x \in U''\times V'' \subseteq (U\times V) \cap (U'\times V'),$$

d.h.

$$x \in U''\times V'' \subseteq U\times V \text{ und } x \in U''\times V'' \subseteq U'\times V'.$$

Aus der ersten Inklusion folgt auf Grund des ersten Falls, die Regularität von f in x bezüglich U und V impliziert diejenigt bezüglich U'' und V''. Auf Grund der zweiten Imklusion hat auf Grund des zweiten Falls, die Regularität von f in x bezüglich U'' und V'' diejenige bezüglich U' und V' zur Folge.

5. Schritt. Der topologische Raum X×Y besitzt die Struktur eines geometrischen Raums.

Für jede offene Teilmengen W von X×Y bezeichnet $\mathcal{O}_{X\times Y}(W)$ die Menge der Funktionen

$$f: W \longrightarrow k,$$

welche in jedem Punkt von W regulär sind. Bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Funktionen mit Werten in k ist dann

$$\mathcal{O}_{X\times Y}(W)$$

eine k-Algebra. Die Einschränkung von Funktionen auf offene Teilmengen $W' \subseteq W$ definiert einen Homomorphismus von k-Algebren

[59] Man wähle die offene Hauptmenge $D(a) \subseteq U\cap U'$ von U derart, daß die das Bild von x bei der natürlichen Projektion $U\times V \longrightarrow U$ und die offene Hauptmenge $D(b) \subseteq V\cap V'$ von V derart, daß sie das Bild von x bei der natürlichen Projektion $U\times V \longrightarrow V$ enthält.

$$\mathcal{O}_{X\times Y}(W) \longrightarrow \mathcal{O}_{X\times Y}(W'),\ f \mapsto f|_{W}.$$

Auf Grund der lokalen Natur des Begriffs der regulären Funktion (ein Funktion ist genau dann regulär, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs regulär ist), ist die Zuordnung

$$W \mapsto \mathcal{O}_{X\times Y}(W)$$

eine Garbe auf $X\times Y$. Mit anderen Worten,

$$(X\times Y, \mathcal{O}_{X\times Y}) \text{ ist ein geometrischer Raum.}$$

6. Schritt. Der geometrische Raum $(X, \mathcal{O}_{X\times Y})$ ist eine Prävarietät.

Die Definition des Begriffs der regulären Funktion ist gerade so gewählt, daß dieser Begriff für Funktionen auf offenen Teilmengen

$$W \subseteq U\times V$$

von Produkten affiner offener Teilmengen U von X und V von Y mit dem Regularitätsbegriff auf der affinen k-Varietät $U\times V$ übereinstimmt, d.h. die Einschränkung

$$\mathcal{O}_{X\times Y}|_{U\times V}$$

der Garbe $\mathcal{O}_{X\times Y}$ auf $U\times V$ ist gerade die Strukturgarbe der k-Varietät $U\times V$. Weil X und Y nach Voraussetzung Prävarietäten sind, bilden die Mengen der Gestalt

$$U\times V$$

mit U affine offen in X und V affine offen in Y eine offene Überdeckung von $X\times Y$. Zusammen mit der Quasi-Kompaktheits-Aussage des zweiten Schritts, ergibt sich, daß $X\times Y$ eine Prävarietät ist.

QED.

1.6.4 Aufgabe

Man ergänze den Beweis von 1.6.3 durch die dort fehlenden Details.

Ergänzung. Im Beweis von 1.6.3 wurde die Isomorphie

$$A_f\otimes_k B_g \cong (A\otimes B)_{f\otimes g}$$

verwendet für k-Algebren A und B und Elemente $f \in A$ und $g \in B$.

Bei

$$A \longrightarrow A_f\ a \mapsto \frac{af}{f}$$

wird f in ene Einheit abgebildet. Deshalb ist auch das Bild von f bei

$$A \longrightarrow A_f \longrightarrow A_f\otimes B_g\ a \mapsto \frac{af}{f} \mapsto \frac{af}{f}\otimes 1,$$

eine Einheit. Analog ist das Bild von g bei

$$B \longrightarrow B_g \longrightarrow A_f\otimes B_g\ b \mapsto \frac{bg}{g} \mapsto 1\otimes\frac{bg}{g},$$

Damit ist das Bild von $f\otimes g = (f\otimes 1)\bullet(1\otimes g)$ bei

$$A\otimes B \longrightarrow A_f\otimes B_g,\ a\otimes b \mapsto \frac{af}{f}\otimes\frac{bg}{g}$$

eine Einheit. Die Abbildung faktorisiert sich also eindeutig über $(A\otimes B)_{f\otimes g}$ und definiert so einen k-Algebra-Homomorphismus,

$$\alpha:(A\otimes B)_{f\otimes g} \longrightarrow A_f\otimes B_g\ ,\ \frac{a\otimes b}{(f\otimes g)^n} \mapsto (\frac{af}{f}\otimes\frac{bg}{g})\bullet(\frac{f^2}{f}\otimes\frac{g^2}{g})^{-n}$$

(1)

$$= \frac{af^{n+1}}{f^{2n+1}} \otimes \frac{bg^{n+1}}{g^{2n+1}}$$
$$= \frac{a}{f^n} \otimes \frac{b}{g^n}$$

Wir wollen zeigen, dies ist ein Isomorphismus und konstruieren dazu die Umkehrabbildung.
Die Abbildung

$$A \longrightarrow A\otimes B \longrightarrow (A\otimes B)_{f\otimes g}\text{ , } a \mapsto a\otimes 1 \mapsto \frac{(a\otimes 1)\bullet(f\otimes g)}{f\otimes g}$$

bildet f in die Einheit $\frac{f^2\otimes g}{f\otimes g}$ ab, denn

$$\frac{f^2\otimes g}{f\otimes g} \bullet \frac{f\otimes g^2}{(f\otimes g)^2} = \frac{(f\otimes g)^3}{(f\otimes g)^3} = \frac{f\otimes g}{f\otimes g}$$

ist das Einselement von $(A\otimes B)_{f\otimes g}$. Deshalb faktorisiert sich die Abbildung über A_f und definiert so einen k-Algebra-Homomorphismus,

$$\varphi{:}A_f \longrightarrow (A\otimes_k B)_{f\otimes g},\ \frac{a}{f^n} \mapsto \frac{(a\otimes 1)\bullet(f\otimes g)}{f\otimes g} \bullet \Big(\frac{f\otimes g^2}{(f\otimes g)^2}\Big)^n$$
$$= \frac{(af^{n+1})\otimes g^{2n+1}}{(f\otimes g)^{2n+1}}$$
$$= \frac{a\otimes g^n}{(f\otimes g)^n}$$

In analoger Weise konstruiert man einen k-Algebra-Homomorphismus,

$$\psi{:}B_g \longrightarrow (A\otimes_k B)_{f\otimes g},\ \frac{b}{g^n} \mapsto \frac{f^n\otimes b}{(f\otimes g)^n}$$

Die durch φ und ψ definierte Abbildung

$$A_f\times B_g \longrightarrow (A\otimes_k B)_{f\otimes g},\ (u, v) \mapsto \varphi(u)\bullet\psi(v),$$

ist bilinear über k (weil φ und ψ k-Algebra-Homomorphismen sind) und definiert so einen Homomorphismus von k-Algebren

$$\beta{:}A_f\times B_g \longrightarrow (A\otimes_k B)_{f\otimes g},\ \frac{a}{f^m}\otimes\frac{b}{g^n} \mapsto \varphi\Big(\frac{a}{f^m}\Big)\bullet\psi\Big(\frac{b}{g^n}\Big)$$

(2)

$$= \frac{a\otimes g^m}{(f\otimes g)^m} \bullet \frac{f^n\otimes b}{(f\otimes g)^n}$$
$$= \frac{(a\bullet f^n)\otimes(b\bullet g^m)}{(f\otimes g)^{m+n}}$$

Wir haben zu zeigen, die Abbildungen $\alpha{:}\ \frac{a\otimes b}{(f\otimes g)^n} \mapsto \frac{a}{f^n}\otimes\frac{b}{g^n}$ und β (von (1) bzw. (2)) sind invers zueinander. Es gilt

$$\alpha\Big(\beta\Big(\frac{a}{f^m}\otimes\frac{b}{g^n}\Big)\Big) = \alpha\Big(\frac{(a\bullet f^n)\otimes(b\bullet g^m)}{(f\otimes g)^{m+n}}\Big)$$
$$= \frac{a\bullet f^n}{f^{m+n}}\otimes\frac{b\bullet g^m}{g^{m+n}}$$

$$= \frac{a}{f^m} \otimes \frac{b}{g^n}$$

also $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}$.
Weiter ist

$$\begin{aligned}\beta(\alpha(\frac{a\otimes b}{(f\otimes g)^n})) &= \beta(\frac{a}{f^n} \otimes \frac{b}{g^n}) \\ &= \frac{(a\bullet f^n)\otimes(b\bullet g^n)}{(f\otimes g)^{2n}} \\ &= \frac{(a\otimes b)\bullet(f\otimes g)^n}{(f\otimes g)^{2n}} \\ &= \frac{a\otimes b}{(f\otimes g)^n},\end{aligned}$$

d.h. es gilt auch $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}$. Die Abbilungen α und β sind zueinander inverse Isomorphismen.

1.6.5 Die Diagonale von X×X

Sei X eine Prävarietät. Dann heißt die Teilmenge

$$\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$$

auch Diagonale von X×X. Diese sei mit der Unterraum-Topologie von X×X versehen. Die Abbildung

$$i: X \longrightarrow \Delta_X,\ x \mapsto (x,x),$$

heißt Diagonal-Morphismus.

Bemerkung

Der Diagonal-Morphismus ist tatsächlich ein Morphismus.

Beweis. Auf Grund der Universalitätseigenschaft des Produkts gibt es genau einen Morphismus

$$X \longrightarrow X\times X,$$

dessen Zusammensetzung mit den beiden Projektionen gerade der identische Morphismus von X ist. Die Abbildung i ist die einzige Abbildung $X \longrightarrow X\times X$, für welche die Zusammensetzung mit den beiden Projektionen die identische Abbildung ist.
QED.

1.6.6 Beispiel

Sei X eine affine k-Varietät. Dann ist Δ_X eine abgeschlossene Teilmenge von X×X.
Genauer, es gilt

(i) $$\Delta_X = V_X(I)$$

mit

$$I := \mathrm{Ker}(K[X\times X] = k[X]\otimes_k k[X] \longrightarrow k[X],\ f\otimes g \mapsto f\bullet g).$$

(ii) Das Ideal I wird erzeugt von den Elementen der Gestalt

$$f\otimes 1 - 1\otimes f \text{ mit } f \in k[X].$$

(iii) Wegen $K[X\times X]/I \cong k[X]$ ist $i: X \longrightarrow \Delta_X$, $x \mapsto (x,x)$, ein Homöomorphismus der zugrundeliegenden topologischen Räume.

1.6.7 Aufgabe.

Man beweise die Aussagen von 1.6.6

Beweis. Sei φ der k-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi: k[X]\otimes_k k[X] \longrightarrow k[X],\ f\otimes g \mapsto f\bullet g.$$

Zu (ii). Nach Definition von φ gilt für jedes $f \in k[X]$

$$\varphi(f\otimes 1 - 1\otimes f) = 1\bullet f - f\bullet 1 = 0,$$

d.h.

$$f\otimes 1 - 1\otimes f \in \mathrm{Ker}(\varphi) = I.$$

Das von den $f\otimes 1-1\otimes f$ erzeugte Ideal liegt somit in I,

$$J := (f\otimes 1-1\otimes f \mid f\in k[X])\bullet k[X]\otimes_k k[X] \subseteq I.$$

Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$x \in \mathrm{Ker}(\varphi).$$

Als Element von $k[X]\otimes_k k[X]$ hat x die Gestalt

$$x = \sum_i f_i\otimes g_i \text{ mit } f_i,\ g_i \in k[X].$$

Wir wollen zeigen, x liegt in J.

Weil x im Kern von φ liegt, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(x) \\ &= \varphi(\sum_i f_i\otimes g_i) \\ &= \sum_i f_i\bullet g_i \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} x &= \sum_i f_i\otimes g_i \\ &= \sum_i (f_i\otimes 1)\bullet(1\otimes g_i) \\ &\equiv \sum_i (1\otimes f_i)\bullet(1\otimes g_i) \bmod J \\ &= \sum_i 1\otimes(f_i\bullet g_i) \\ &= 1\otimes\sum_i (f_i\bullet g_i) \\ &= 1\otimes 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

also

$$x \in J.$$

Zu (i) und (iii).

Der k-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi: k[X\times X] = k[X]\otimes_k k[X] \longrightarrow k[X],\ f\otimes g \mapsto f\bullet g.$$

induziert einen Morphismus algebraischer Varietäten

$$\varphi^\#: X \longrightarrow X\times X.$$

Die Zusammensetzungen von φ mit den natürlichen Abbildungen

$\alpha: k[X] \longrightarrow k[X]\otimes_k k[X],\ f \mapsto f\otimes 1$, und

$\beta: k[X] \longrightarrow k[X]\otimes_k k[X],\ f \mapsto 1\otimes f$,

sind jeweils die identische Abbildung von k[X]. Deshalb ist die Zusammensetzung von $\varphi^\#$ mit den natürlichen Projektionen $\alpha^\#: X\times X \longrightarrow X$ und $\beta^\#: X\times X \longrightarrow X$ auf den ersten bzw. zweiten Faktor ebenfalls jeweils die identische Abbildung von X (vgl. Bemerkung 1.5.1 (iv)). Mit anderen Worten, $\varphi^\#$ ist die Abbildung

$$\varphi^\# = i: X \longrightarrow X\times X,\ x \mapsto (x,x). \tag{1}$$

Identifiziert man die Punkte von X mit den Maximalen Idealen von k[X], so bekommt $\varphi^\#$ die Gestalt

$$\varphi^\#: \mathrm{Specm}\ k[X] \longrightarrow \mathrm{Specm}\ k[X]\otimes_k k[X],\ m \mapsto \varphi^{-1}(m)$$

(vgl. Bemerkung 1.4.7 (ii)).

Die Abbildung φ ist surjektiv, denn für vorgegebenes $f \in k[X]$ gilt

$\varphi(f\otimes 1) = f\bullet 1 = f.$

Weil φ surjektiv ist, identifiziert die Abbildung $\varphi^\#$ die maximalen Ideale von k[X] mit den maximalen Idealen von $k[X]\otimes_k k[X]$ welche den Kern von φ enthalten, d.h.

$$\varphi^\#: \mathrm{Specm}\ k[X] \longrightarrow V(I) = \mathrm{Specm}\ k[X]\otimes_k k[X]/I,\ m \mapsto \varphi^{-1}(m), \tag{2}$$

ist bijektiv. Damit gilt Aussage (i):

$$V(I) = \mathrm{Im}(\varphi^\#) \overset{(1)}{=} \{(x,x) \mid x \in X\} = \Delta_X ,$$

Wegen

$$\begin{aligned} k[X]\otimes_k k[X]/I &= k[X]\otimes_k k[X]/\mathrm{Ker}(\varphi) \\ &\cong \mathrm{Im}(\varphi) \\ &= k[X]. \end{aligned}$$

ist die Bijektion (2) der Morphismus von k-Varietäten zum k-Algebra-Isomorphismus

$$k[X]\otimes_k k[X]/I \xrightarrow{\cong} k[X],$$

also ein Isomorphismus von k-Varietäten, und damit insbesondere ein Homöomorphismus (vgl. Bemerkkung 1.4.7 (iv)).
Man beachte, k[X] ist als Koordinatenring reduziert, d.h. I ist ein ein radikales Ideal,

$I = \sqrt{I}.$

QED.

1.6.8 Lemma

Für jede Prävarietät X ist die Abbildung

$$i: X \longrightarrow \Delta_X ,\ x \mapsto (x,x),$$

ein Homöomorphismus der zugrundeliegenden topologische Räume.

Beweis. Als Morphismus ist i eine stetige Abbildung (vgl. Bemerkung 1.4.7 (iv)). Es reicht zu zeigen i ist offen (d.h. i bildet offene Teilmengen in offene Teilmengen ab). Sei

$$U \subseteq X$$

eine offene Teilmenge. Wir haben zu zeigen,

$$i(U) \text{ ist offen in } \Delta_X.$$

Als Prävarietät ist X Vereinigung von endlich vielen affinen offenen Teilmengen, sagen wir

$$X = U_1 \cup \ldots \cup U_n \text{ mit } U_j \text{ affine offene Teilmenge von } X.$$

Nach 1.6.6 (iii) ist

$$i_{U_j}: U_j \longrightarrow \Delta_{U_j},\ x \mapsto (x,x),$$

für j = 1, ... , n ein Homöomorphismus. Insbesondere ist

$$i_{U_j}(U \cap U_j) = \{(x,x) \mid x \in U \cap U_j\}$$

eine offene Teilmenge von Δ_{U_j}. Es gibt also eine offene Teilemenge V_j von $U_j \times U_j$ mit

$$i_{U_j}(U \cap U_j) = \Delta_{U_j} \cap V_j \text{ mit } V_j \text{ offen in } U_j \times U_j \tag{1}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\bigcup_{j=1}^{n} i_{U_j}(U \cap U_j) &= \bigcup_{j=1}^{n} \{(x,x) \mid x \in U \cap U_j\} \\ &= \{(x,x) \mid x \in U\} \qquad \text{(weil X von den } U_j \text{ überdeckt wird)} \\ &= i(U)\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}i(U) &= \bigcup_{j=1}^{n} i_{U_j}(U \cap U_j) \\ &= \bigcup_{j=1}^{n} (\Delta_{U_j} \cap V_j) \qquad \text{(nach (1))}\end{aligned}$$

Wegen $\Delta_{U_j} = \Delta_X \cap (U_j \times U_j)$ folgt

$$\begin{aligned}i(U) &= \bigcup_{j=1}^{n} (\Delta_X \cap (U_j \times U_j) \cap V_j) \\ &= \bigcup_{j=1}^{n} (\Delta_X \cap V_j) \qquad \text{(wegen } V_j \subseteq U_j \times U_j \text{ vgl. (1))} \\ &= \Delta_X \cap (\bigcup_{j=1}^{n} V_j)\end{aligned}$$

Weil V_j offen ist in $U_j \times U_j$ (vgl. (1)) und $U_j \times U_j$ offen ist in X×X (vgl. 1.6.3 zweiter Schritt des Beweises), ist auch V_j offen in X×X, d.h. $\bigcup_{j=1}^{n} V_j$ ist offen in X×X. Dann ist aber

$$i(U) = \Delta_X \cap (\bigcup_{j=1}^{n} V_j)$$

offen in Δ_X.

QED.

1.6.9 Varietäten

Eine Prävarietät X über k heißt Varietät über k oder auch algebraische Varietät über k oder auch k-Varietät, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist.

Separabilitätsaxiom:

$$\Delta_X \text{ ist abgeschlossen in X.}$$

Bemerkungen

(i) Nach 1.6.6 ist jede affine Varietät über k eine Varietät über k.

(ii) In Aufgabe 1.6.13 (1) wird eine Prävarietät beschrieben, die keine Varietät ist.

(iii) Ein Morphismus von Varietäten ist ein Morphismus von geometrischen Räumen $X \longrightarrow Y$, wobei X und Y Varietäten sind. Die Kategorie der Varietäten über k ist eine volle Teilkategorie der Kategorie der geometrischen Räume.

1.6.10 Aufgaben

(1) Zeigen Sie, ein topologischer Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn die Diagonale

$$\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$$

abgeschlossen ist in X×X bezüglich der Produkt-Topologie von X×X.

(2) Das Produkt von zwei Varietäten ist eine Varietät.

(3) Eine Teil-Prävarietät einer Varietät ist eine Varietät.

(4) Sei X eine Varietät. Definieren Sie auf den offenen und den abgeschlossenen Teilmengen von X (bezüglich der Unteraum-Topologie) eine Varietäten-Struktur.

Beweis. Zu (1). Sei X ein Hausdorff-Raum. Wir haben zu zeigen, Δ_X ist abgeschlossen in X×X. Dazu reicht es zu zeigen,

$$X\times X - \Delta_X \text{ ist offen in } X\times X.$$

Sei $(a, b) \in X\times X - \Delta_X$. Es reicht zu zeigen, es gibt eine offene Teilmenge W von X×X mit

$$(a, b) \in W \subseteq X\times X-\Delta_X.$$

Weil der Punkt (a,b) nicht in Δ_X sind die Punkte a und b von X verschieden. Weil X ein Hausdorff-Raum ist, gibt es disjunkte offene Mengen U und V von X mit

$$a\in U \text{ und } b\in V.$$

Weil U und V disjunkt sind gilt

$$U\times V \subseteq X\times X - \Delta_X.$$

Wegen $a \in U$ und $b\in V$ gilt außerdem

$$(a,b) \in U\times V.$$

Die Menge U×V ist offen in der Produkt-Topologie von X×Y. Mit

$$W := U\times V$$

sind damit alle Bedingungen an W erfüllt.

Sei umgekehrt Δ_X abgeschlossen in X×Y. Weiter seien $a, b \in X$ zwei verschiedene Punkte. Wir haben disjunkte offene Umgebungen von a und b zu finden.

Weil a und b verschieden sind, liegt (a,b) nicht auf der Diagonalen, d.h. es ist

$$(a,b) \in X\times Y - \Delta_X.$$

Weil die Differenz rechts nach Voraussetzung offen ist, gibt es eine offene Menge W von X×Y mit

$$(a, b) \in W \subseteq X{\times}Y - \Delta_X.$$

Weil die Mengen der Gestalt

$$U{\times}V \text{ mit } U \text{ und } V \text{ offen in } X$$

eine Topologie-Basis der Produkt-Topologie von $X{\times}X$ bilden, kann man offene Mengen U und V in X derart wählen, daß gilt

$$(a, b) \in U{\times}V \subseteq W\ (\subseteq X{\times}Y - \Delta_X).$$

Dann gilt $a \in U$ und $b \in V$. Weil $U{\times}V$ disjunkt ist zu Δ_X, sind die offenen Umgebungen U und V disjunkt.

Zu (2). Seien X und Y zwei Varietäten. Dann sind die Teilmengen

$$\Delta_X = \{(x,x) \mid x{\in}X\} \text{ und } \Delta_Y = \{(y,y) \mid y{\in}Y\}$$

abgeschlossen in X bzw. Y. Wir haben zu zeigen,

$$\Delta_{X{\times}Y} = \{ (x,y,x,y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

ist abgeschlossen in $X{\times}Y{\times}X{\times}Y$. Wir betrachten die Morphismen

$p: X{\times}Y{\times}X{\times}Y \longrightarrow X{\times}X,\ (a, b, c, d) \mapsto (a, c)$, und

$q: X{\times}Y{\times}X{\times}Y \longrightarrow Y{\times}Y,\ (a, b, c, d) \mapsto (b, d)$.

Die Abbildung p ist der eindeutig bestimmte Morphismus, dessen Zusammensetzungen mit den beiden Projektionen von $X{\times}X$ gerade die folgenden Morphismen sind.

$X{\times}Y{\times}X{\times}Y \longrightarrow X{\times}Y \longrightarrow X$

(Zusammensetzung der Projektionen auf den ersten Faktor)

$X{\times}Y{\times}X{\times}Y \longrightarrow X{\times}Y \longrightarrow X$

(Projektion auf den zweiten Faktor gefolgt von der auf den ersten)

Die Abbildung q ist der eindeutig bestimmte Morphismus, dessen Zusammensetzungen mit den beiden Projektionen von $Y{\times}Y$ gerade die folgenden Morphismen sind.

$X{\times}Y{\times}X{\times}Y \longrightarrow X{\times}Y \longrightarrow Y$

(Projektion auf den ersten Faktor gefolgt von der auf den zweiten)

$X{\times}Y{\times}X{\times}Y \longrightarrow X{\times}Y \longrightarrow Y$

(Zusammensetzung der Projektionen auf den zweiten Faktor)

Insbesondere ist p und q Morphismen, also stetige Abbildungen. Es gilt

$$\Delta_{X{\times}Y} = p^{-1}(\Delta_X) \cap q^{-1}(\Delta_Y)$$

Weil p und q stetig sind ist mit Δ_X und Δ_Y auch $\Delta_{X{\times}Y}$ abgeschlossen.

Zu (3). Seien X eine Varietät und $Y \subset X$ eine Teil-Prävarietät. Nach Voraussetzung ist

$$\Delta_X = \{(x,x) \mid x{\in}X\}$$

abgeschlossen in $X{\times}X$. Der Raum Y ist mit der Unterraum-Topologie von X versehen, d.h. die natürliche Einbettung

$$Y \hookrightarrow X \tag{1}$$

ist stetig. Die natürliche Einbettung

$$Y{\times}Y \hookrightarrow X{\times}X \tag{2}$$

ist gerade der Morphismus, dessen Komponenten gerade die Zusammensetzungen der Einbettung (1) mit den Projektionen von $Y{\times}Y$ auf die beiden Faktoren sind. Insbesondere ist (2) ein Morphismus und als solcher stetig. Das Urbild der abgeschlossenen Menge Δ_X ist deshalb abgeschlossen, d.h.

$$\Delta_X \cap (Y\times Y) = \{(y,y) \mid y\in Y\} = \Delta_Y$$

ist abgeschlossen.

Zu (4). Sei U eine offene Teilmenge von X. Wir versehen U mit der Unterraum-Topologie von X und der Strukturgarbe

$$\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U .$$

1. Schritt. (U, $\mathcal{O}_U$) ist ein Prävarietät.

Zu jeden Punkt x ∈ U gibt es eine affine offene Menge V von X mit x ∈ V. Der Durchschnitt

$$U\cap V$$

ist eine offene Teilmenge von V, die den Punkt x enhält. Weil die offenen Hauptmengen der affinen Varietät V eine Topologie-Basis bilden, gibt des ein f ∈ k[V] mit

$$x \in D(f) \subseteq U\cap V.$$

Die offene Hauptmenge D(f) ist aber eine affine offene Menge von X (mit dem Koordinatenring $k[V]_f$). Jeder Punkt von U liegt also in einer affinen offenen Teilmenge von U.

2. Schritt. (U, $\mathcal{O}_U$) ist eine Varietät.

Weil Δ_X abgeschlossen ist in X×X ist

$$\Delta_U = \{(x,x) \mid x \in U \} = (U\times U)\cap\Delta_X$$

abgeschlossen in U×U.

Sei jetzt F eine abgeschlossene Teilmenge von X. Wir versehen F mit der Unterraum-Topologie von X und der Strukturgarbe

$$\mathcal{O}_F := \mathcal{O}_X|_F .$$

3. Schritt. (F, $\mathcal{O}_F$) ist eine Prävarietät.

Zu jeden Punkt x ∈ F gibt es eine affine offene Menge V von X mit x ∈ V. Der Durchschnitt

$$F\cap V$$

ist eine offene Teilmenge von V, die den Punkt x enhält, d.h.

$$F\cap V = \mathbf{V}_V(I)$$

mit einem Ideal I von k[V]. Wir können annehmen, das Ideal ist radikal, d.h.

$$I = \sqrt{I} = \mathbf{I}_V(F\cap V).$$

Dann ist $F\cap V$ eine algebraische Teilmenge von V mit dem Koordinatenring

$$k[F\cap V] \cong k[V]/\mathbf{I}_V(F\cap V),$$

die Einschränkung definiert einen surjektiven k-Algebra-Homomorphismus

$$k[V] \twoheadrightarrow k[F\cap V],\ f \mapsto f|_{F\cap V},$$

mit dem Kern $\mathbf{I}_V(F\cap V)$. Jede (lokal definierte) reguläre Funktion auf $F\cap V$ ist Einschränkung einer (lokal definierten)[60] regulären Funktion auf V. Mit anderen

[60] Wir können zu offenen Hauptmengen übergehen.

Worten, die Einschränkung der Garbe $\mathcal{O}_F$ auf die offene Teilmenge $F\cap V$ von F ist gerade die Strukturgarbe der affinen Varietät $F\cap V$ und $F\cap V$ ist eine affine offene Teilmenge von F, die den vorgegebenen Punkt $x \in F$ enthält.
4. Schritt. . $(F, \mathcal{O}_F)$ ist eine Varietät.
Weil Δ_X abgeschlossen ist in X×X ist

$$\Delta_F = \{(x,x) \mid x \in F\} = (F\times F)\cap\Delta_X$$

abgeschlossen in F×F.
QED.

Bemerkungen
(i) Für jede Varietät X über k ist die Diagonale

$$\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \;(\subseteq X\times X)$$

eine Teilvarietät von X×X (d.h. ein geometrischer Unterraum, der eine Varietät ist), und der Diagonal-Morphismus

$$X \longrightarrow \Delta_X,\ x \mapsto (x,x),$$

ist ein Isomorphismus von Varietäten.
(ii) Zum Beweis der nachfolgenden Aussage wird das Separabilitätsaxiom benötigt.

Beweis von (i). 1. Schritt. X ist eine Varietät und $j: X \longrightarrow \Delta_X$, $x \mapsto (x,x)$, ein Morphismus.

Weil X eine Varietät ist, ist Δ_X eine abgeschlossene Teilmenge der Varietät X×X (vgl. Aufgabe 1.6.10 (2)) und besitzt deshalb ebenfalls die Struktur einer Varietät (vgl. Aufgabe 1.6.10 (4)). Als Morphismus ist die Diagonal-Abbildung

$$i: X \longrightarrow X\times X,\ x \mapsto (x,x),$$

stetig. Da die Topologie der Varietät Δ_X gerade die Unterraum-Topologie von X×X ist (vgl. Aufgabe 1.6.10 (4)), ist damit die Diagonal-Abbildung als Abbildung mit Werten in Δ_X stetig,

$$j: X \longrightarrow \Delta_X,\ x \mapsto (x,x), \text{ ist stetig.}$$

Weil die Diagonal-Abbildung $i: X \longrightarrow X\times X$ ein Morphismus ist, ist

$$i^*(f) = f\circ i$$

eine reguläre Funktion für jede auf einer offenen Teilmenge von X×X definierte reguläre Funktion f. Wegen $f\circ i = (f|_{\Delta_X})\circ i$ und weil die regulären Funktionen auf Δ_X lokal von der Gestalt $f|_{\Delta_X}$ sind, ist auch

$$j^*(f) = f\circ j$$

eine reguläre Funktion auf X für jede auf einer offenen Teilmenge von Δ_X definierte reguläre Funktion. Mit anderen Worten, j ist ein Morphismus von geometrischen Räumen und damit ein Morphismus von Varietäten.
2. Schritt. j ist ein Isomorphismus.
Nach Definition des Diagonal-Morphismus

$$i: X \longrightarrow X\times X$$

ist dieser ein Morphismus, dessen Zusammensetzung mit der Projektion

$$p: X\times X \longrightarrow X, (x,x') \mapsto x,$$

auf den ersten Faktor der identische Morphismus ist,

$$\mathrm{Id} = p\circ i = (p|_{\Delta_X})\circ j \qquad (1)$$

Nach Definition der Struktur einer Varietät auf der abgeschlossenen Teilmenge Δ_X von $X\times X$ ist die natürliche Einbettung

$$\Delta_X \hookrightarrow X\times X \text{ ein Morphismus}$$

(weil die regulären Funktionen auf Δ_X lokal Einschränkungen von regulären Funktionen auf $X\times X$ Also ist die Zusammensetzung $p|_{\Delta_X}$ von p mit dieser Einbettung ebenfalls ein Morphismus,

$$p|_{\Delta_X}: \Delta_X \longrightarrow X \text{ ist ein Morphismus.}$$

Schließlich gilt neben (1) auch

$$j\circ(p|_{\Delta_X}) = \mathrm{Id}$$

(denn für jeden Punkt (x,x) von Δ_X gilt $j(p((x,x)) = j(x) = (x,x))$, d.h. j und $p|_{\Delta_X}$ sind zueinander inverse Morphismen.

QED.

1.6.11 Eigenschaften von Varietäten

Seien X eine Varietät und Y eine Prävarietät (beide über k).

(i) Ist $\Phi: Y \longrightarrow X$ ein Morphismus, so ist der Graph

$$\Gamma_\Phi = \{(y, \Phi(y)) \mid y \in Y\}$$

abgeschlossen in $Y\times X$.

(ii) Sind $\Phi, \Psi: Y \longrightarrow X$ zwei Morphismen, die auf einer dichten Teilmenge übereinstimmen, so gilt $\Phi = \Psi$.

Beweis. Zu (i). Wir betrachten den Morphismus

$$Y\times X \longrightarrow X\times X, (y, x) \mapsto (\Phi(y), x), \qquad (1)$$

dessen Koordinaten-Funktionen gerade die Zusammensetzung

$$Y\times X \longrightarrow Y \xrightarrow{\Phi} X$$

der Projektion auf den ersten Faktor mit Φ ist bzw. die Projektion

$$Y\times X \longrightarrow X$$

auf den zweiten Faktor. Als Morphismus ist die Abbildung (1) stetig. Das Urbild der abgechlossenen Teilmeng Δ_X von $X\times X$ ist deshalb abgeschlossen. Dieses Urbild ist aber gerade der Graph Γ_Φ.

Zu (ii). Wir betrachten den Morphismus

$$Y \longrightarrow X\times X, y \mapsto (\Phi(y), \Psi(y)), \qquad (2)$$

dessen Koordinaten-Funktionen gerade die Morphismen Φ und Ψ sind. Als Morphismus ist die Abbildung (2) stetig. Das Urbild der abgechlossenen Teilmeng Δ_X von $X\times X$ ist deshalb abgeschlossen. Dieses Urbild ist aber gerade die Menge

$$\{ y \in Y \mid \Phi(y) = \Psi(y) \}$$

Nach Voraussetzung liegt diese Menge dicht in Y. Weil sie abgeschlossen ist, ist sie gleich Y, d.h. es gilt $\Phi = \Psi$.
QED.

1.6.12 Kriterium für Varietäten

(i) Seien X eine Varietät und U, V zwei affine offene Teilmengen von X. Dann ist auch $U\bigcap V$ eine affine offene Teilmenge von X und die Bilder von $\mathcal{O}_X(U)$ und $\mathcal{O}_X(V)$ bei den Restriktionen

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U\bigcap V) \text{ und } \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U\bigcap V)$$

erzeugen $\mathcal{O}_X(U\bigcap V)$ als k-Algebra.

(ii) Sei X eine Prävarietät mit der Überdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^m U_i$$

durch affine offene Teilmengen. Dann ist X genau dann eine Varietät, wenn für je zwei Indizes i und der Durchschnitt

$$U_i \bigcap U_j \text{ affine offene Teilmenge von X}$$

ist und die Bilder der Restriktionen

$$\mathcal{O}_X(U_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_i\bigcap V_j) \text{ und } \mathcal{O}_X(U_j) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_i\bigcap U_j)$$

die Algebra $\mathcal{O}_X(U_i\bigcap U_j)$ über k erzeugen.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Weil X als Varietät dem Separiertheitsaxiom genügt ist

$$\Delta_X \bigcap (U\times V)$$

eine abgeschlossene Teilmenge der affinen Varietät $U\times V$. Der Isomorphismus geometrischer Räume

$$j: X \longrightarrow \Delta_X,\ x \mapsto (x,x),$$

(vgl. Bemerkung 1.6.10 (i)) bildet die offene Teilmenge $U\bigcap V$ von X ab in die offene Teilmenge $\Delta_X \bigcap (U\times V)$ von Δ_X, induziert also einen Isomorphismus geometrischer Räume

$$U\bigcap V \longrightarrow \Delta_X \bigcap (U\times V).$$

Die Menge rechts ist eine abgeschlossene Teilmenge der affinen Varietät $U\times V$, also selbst eine affine Varietät. Deshalb ist auch

$$U\bigcap V \text{ affine offene Teilmenge von X,}$$

und wir erhalten eine Isomorphien von k-Algebren

$$\begin{aligned} k[U\bigcap V] &\cong k[\Delta_X \bigcap (U\times V)] \\ &\cong k[U\times V]/I(\Delta_X \bigcap (U\times V)) \end{aligned}$$

und damit eine Surjektion von k-Algebren

$$k[U]\otimes_k k[V] \twoheadrightarrow k[U\bigcap V],\ f \mapsto j^*(f) = f\circ j.$$

Weil die k-Algebra $k[U]\otimes_k k[V]$ erzeugt wird von den Elementen von

$$k[U]\otimes 1 \text{ und } 1\otimes k[V],$$

wird auch deren Bild

$$k[U \cap V] = \mathcal{O}_X(U \cap V)$$

erzeugt von den Bildern von

$$k[U] = \mathcal{O}_X(U) \text{ und } k[V] = \mathcal{O}_X(V)$$

in $\mathcal{O}_X(U \cap V)$.

<u>Zu (ii)</u>. Die Bedingung für die Varietätseigenschaft ist notwendig auf Grund von (ii). Wir haben noch zu zeigen, sie ist hinreichend. Sei sie um also erfüllt. Dann ist für je zwei Indizes

$$U_i \cap U_j \text{ eine affine offene Teilmenge von X,}$$

hat also die Struktur einer affinen Varietät und genügt dem Separiertheitsaxiom. Damit hat die Menge

$$\Delta_{U_i \cap U_j} = \{(x,x) \mid x \in U_i \cap U_j\} = \Delta_X \cap (U_i \times V_j)$$

die Struktur einer Varietät, welche zur affinen Varietät $U_i \cap U_j$ isomorph ist (vgl. Bemerkung 1.6.10 (i)). Nach Voraussetzung wird der Koordinatenring von $U_i \cap U_j$,

$$k[U_i \cap U_j] = \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

erzeugt von den Bildern der Koordinatenringe

$$k[U_i] = \mathcal{O}_X(U_i) \text{ und } k[U_j] = \mathcal{O}_X(U_j)$$

von U_i und U_j in $k[U_i \cap U_j]$ (bezüglich der Garben-Restriktionen), d.h. der k-Algebra-Homomorphimus

$$\alpha: k[U_i \times V_j] = k[U_i] \otimes_k k[U_j] \twoheadrightarrow k[U_i \cap U_j],\ f \otimes g \mapsto (f|_{U_i \cap U_j}) \cdot (g|_{U_i \cap U_j}),$$

ist surjektiv, induziert also einen Isomorphismus von k-Varietäten

$$\alpha^{\#}: U_i \cap U_j \xrightarrow{\cong} V(\mathrm{Ker}(\alpha)) \ (\subseteq U_i \times V_j).$$

Die Zusammensetzungen von α mit den natürlichen Abbildungen

$k[U_i] \longrightarrow k[U_i] \otimes_k k[U_j]$, $f \mapsto f \otimes 1$, und $k[U_j] \longrightarrow k[U_i] \otimes_k k[U_j]$, $f \mapsto 1 \otimes f$,

sind gerade die identischen Abbildungen von $k[U_i]$ bzw. $k[U_j]$. Deshalb sind die Zusammensetzungen von $\alpha^{\#}$ mit den natürlichen Projektionen

$$U_i \times V_j \longrightarrow U_i \text{ und } U_i \times V_j \longrightarrow V_j$$

die identischen Abbildungen von U_i bzw. V_j, d.h. $\alpha^{\#}$ ist die Abbildung

$$\alpha^{\#}: U_i \cap U_j \xrightarrow{\cong} V(\mathrm{Ker}(\alpha)),\ x \mapsto (x,x),$$

und

$$V(\mathrm{Ker}(\alpha)) = \mathrm{Im}(\alpha^{\#}) = \Delta_{U_i \cap U_j} = \Delta_X \cap (U_i \times U_j),$$

d.h.

$$\Delta_X \cap (U_i \times U_j) \text{ ist abgeschlossen in } U_i \times U_j \text{ für jedes i und jedes j.}$$[61]

Dann ist aber auch

$$\Delta_X \text{ abgeschlossen in } X \times X,$$

denn jeder Berührungspunkt (x,y) von Δ_X liegt in einer der Megen $U_i \times U_j$, ist also Berührungspunkt von $\Delta_X \cap (U_i \times U_j)$ und liegt damit - wie gerade gezeigt - in

$$\Delta_X \cap (U_i \times U_j)$$

und damit in Δ_X.

QED.

1.6.13 Aufgaben

Aufgabe 1: die affine Gerade mit verdoppelten Ursprung

Definieren Sie wie folgt eine "Gerade mit verdoppelten Ursprung 0". Die zugrundeliegende Menge X sei die affine Gerade $\mathbb{A}^1$ zusammen mit einem weiteren Punkt 0',

$$X := \mathbb{A}^1 \cup \{0'\} \text{ (als Mengen).}$$

Bezeichne ϕ die Abbildung

$$\phi: \mathbb{A}^1 \longrightarrow X \text{ mit } \phi(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \neq 0 \\ 0' & \text{falls } x=0 \end{cases}$$

Die offenen Mengen von X seien die Vereinigungen der offenen Mengen von $\mathbb{A}^1$ mit den Bildern der offenen Mengen von $\mathbb{A}^1$ bei ϕ. Eine Funktion

$$f: U \longrightarrow k$$

auf einer offenen Menge U von X sei regulär, wenn

$$f|_{U \cap \mathbb{A}^1}: U \cap \mathbb{A}^1 \longrightarrow k \text{ und } \phi^*(f) = f \circ \phi : \phi^{-1}(U) \longrightarrow k$$

reguläre Funktionen bezüglich der gewöhnlichen affinen Varietäten-Struktur von $\mathbb{A}^1$ sind. Zeigen Sie, X ist eine Prävarietät aber eine Varietät.

Beweis.1. <u>Schritt</u>. Die abgeschlossenen Mengen von X sind außer X gerade die endlichen Mengen (wobei wir die leere Menge zu den endlichen Mengen zählen).

Nach Definition soll eine offene Menge von X eine Menge der Gestalt

$$U \cup \varphi(U')$$

sein, wobei U und U' Vereinigungen von offenen Mengen von $\mathbb{A}^1$ sind, d.h. U und U' sind offene Mengen von $\mathbb{A}^1$.

Insbesondere sind die offenen Mengen von $\mathbb{A}^1$,

$$U = U \cup \phi(\emptyset),$$

offen in X ebenso wie die Bilder bei ϕ von offenen Mengen von $\mathbb{A}^1$,

---

[61] Ohne die Bedingungen von (ii) könnten wir nur schließen, daß $\Delta_{U_i \cap U_j} = \Delta_X \cap (U_i \times U_j)$ abgeschlossen ist in $(U_i \cap U_j) \times (U_i \cap U_j)$ (wenn $U_i \cap U_j$ affin ist).

$$\varphi(U') = \varnothing \bigcup \varphi(U').$$

Die Komplemente der offenen Mengen von X, die wir abgeschlossene Mengen von X nennen wollen, sind somit von der Gestalt

$$X - (U \bigcup \varphi(U')) = (X-U) \bigcap (X- \varphi(U'))$$
$$= (X- \mathbb{A}^1) \bigcap (\mathbb{A}^1-U) \bigcap (X-\phi(\mathbb{A}^1)) \bigcap (\phi(\mathbb{A}^1-U'))$$

Falls U und U' von der leeren Menge verschieden sind, ist dies ein Durchschnitt endlicher Mengen, also endlich. Ist eine der Mengen U, U' leer, so erhalten wir X. Damit ist eine abgeschlossene Menge von X gleich X oder eine endliche Teilmenge von X.

Zeigen wir, daß auch die Umkehrung gilt. Wegen

$$\varnothing = \varnothing \bigcup \varphi(\varnothing)$$

Ist $\varnothing$ ein offene Menge von X, also X = X - $\varnothing$ eine abschlossene Menge. Wir haben noch zu zeigen, die endlichen Teilmengen von X sind abgeschlossen in X. Sei also

$$\{p_1,...,p_n\}$$

eine endliche Teilmenge von X.

Falls unter den Punkten p_i der Ursprung 0' vorkommt, so ist

$$\mathbb{A}^1 - \{p_1,...,p_n\} = X - \{0',p_1,...,p_n\} = X - \{p_1,...,p_n\}$$

offen in A^1, also auch in X, also ist $\{p_1,...,p_n\}$ abgeschlossen in X.

Falls unter den Punkten p_i der Ursprung 0 vorkommt, so ist

$$\phi(\mathbb{A}^1 - \{p_1,...,p_n,\}) = X - \{0, p_1,...,p_n\} = X - \{p_1,...,p_n\}$$

offen in $\phi(\mathbb{A}^1)$, also auch in X, also ist $\{p_1,...,p_n\}$ abgeschlossen in X.

Falls unter den Punkten p_i keiner der Ursprünge 0, 0' vorkommt, so ist

$$(\mathbb{A}^1 -\{p_1,...,p_n\}) \bigcup \varphi(\mathbb{A}^1 - \{p_1,...,p_n\})$$
$$= (X - \{0',p_1,...,p_n\}) \bigcup (X-\{0, p_1,...,p_n\})$$
$$= X-(\{0',p_1,...,p_n\} \bigcap \{0, p_1,...,p_n\})$$
$$= X-\{p_1,...,p_n\} \qquad \text{(weil kein } p_i \text{ gleich 0 oder 0' ist)}$$

offen in X, also $\{p_1,...,p_n\}$ abgeschlossen ist in X.

2. Schritt. Die Menge der abgeschlossenen Mengen von X genügt den Axiomen einer Topologie

Nach dem ersten Schritt ist X abgeschlossen und die leere Menge ist es, weil sie endlich ist.

Der Durchschnitt einer beliebigen Familie endlicher Mengen ist endlich. Falls in der Familie auch X vorkommt, so ist der Durchschnitt gleich X oder endlich, je nachdem ob in der Familie nur X oder auch eine endliche Menge vorkommt. Auf jeden Fall ist das Ergebnis der Durchschnittsbildung abgeschlossen.

Die Vereinigung zweier endlicher Mengen ist endlich. Ist eine eine der Mengen oder sind beide gleich X, so ist die Vereinigung gleich X. Auf jeden Fall ist die Vereinigung abgeschlossen.

3. Schritt. Die Topologie von X induziert auf dem Unterraum $\mathbb{A}^1$ die Zariski-Topologie und auf dem Unterraum $\phi(\mathbb{A}^1)$ eine Topologie, durch welche $\phi: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \phi(\mathbb{A}^1)$ ein Homöomorphismus wird.

Die abgeschlossenen Mengen von X sind X und die endlichen Teilmengen von X. Ihr Durchschnitte mit $\mathbb{A}^1$ sind $\mathbb{A}^1$ bzw. die endlichen Teilmengen von $\mathbb{A}^1$, d.h. die Zariski-abgeschlossenen Mengen von $\mathbb{A}^1$.
Ihr Durchschnitt mit $\phi(\mathbb{A}^1)$ sind $\phi(\mathbb{A}^1)$ bzw. die endlichen Teilmengen von $\phi(\mathbb{A}^1)$. Es sind gerade die Bilder der Zariski-abgeschlossenen Menge von $\mathbb{A}^1$ bei der Bijektin ϕ.
4. Schritt. Für eine Funktion $f: U \longrightarrow k$ auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{A}^1 \cap \phi(\mathbb{A}^1)$ sind folgende Aussagen äquivalent.

1. f ist regulär.
2. $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$.
3. $\phi^*(f) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(\phi^{-1}(U))$.

Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$ und die Abbildug

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(U)),\ f \mapsto \phi^*(f),$$

ist ein Isomorphismus von k-Algebren.

$2 \Leftrightarrow 3$:
Die Bedingungen 2 und 3 sind äquivalent, weil ϕ außerhalb Ursprungs 0 die identische Abbildung ist, so daß wegen $U \subseteq \mathbb{A}^1 \cap \phi(\mathbb{A}^1)$ die Verpflanzung von f entlang ϕ gleich $\phi^*(f) = f$ ist.

$1 \Rightarrow 2$ und $1 \Rightarrow 3$:
Die Implikationen $1 \Rightarrow 2$ und $1 \Rightarrow 3$ bestehen nach Definition der Regularität auf X.

$2 \Rightarrow 1$ und $3 \Rightarrow 1$.
Ist eine der Bedingungen 2 oder 3 erfüllt, so ist es auch die andere. Zusammen folgt aus ihnen aber Bedingung 1 (nach Definition der Regularität).
5. Schritt. Sei U eine offene Menge des $\mathbb{A}^1$ mit $0 \in U$. Wir setzen

$$\tilde{U} := \phi(U) = (U - 0) \cup \{0'\}$$

Für jede Funktion $f: U \longrightarrow k$ sei $\tilde{f}: \tilde{U} \longrightarrow k$ die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ falls } x \neq 0' \\ f(0) \text{ falls } x = 0' \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{U}$ eine offene Menge von X und die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. f ist regulär.
2. $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$
3. $\phi^*(\tilde{f}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$.

Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$.

2 ⇔ 3:

Die Bedingenen 2 und 3 sind äquivalent, weil $\phi^*(\widetilde{f}) = \widetilde{f}\circ\phi = f$ gilt.

2 ⇒ 1:

Nach Voraussetzung ist f regulär als Funktion auf der offenen Teilmenge U des $\mathbb{A}^1$. Weil die Menge {0} abgeschlossen ist, ist die Einschränkung

$$f|_{U-\{0\}}: U-\{0\} \longrightarrow k$$

ebenfalls regulär. Wegen $U-\{0\} = \phi^{-1}(U)$ ist dies aber gerade die Funktion

$$\phi^*(f) = f\circ\phi: \phi^{-1}(U) \longrightarrow k.$$

Deshalb ist $f: U \longrightarrow k$ auch regulär als Funktion auf der offenen Teilmenge U von X.

1 ⇒ 2: Bedingung 2 ist eine der Bedingungen für die Regularität auf den offenen Mengen von X. Die Implikation besteht trivialerweise.

6. Schritt. Sei U eine offene Menge des $\mathbb{A}^1$ mit $0 \in U$.

Für jede Funktion $f: \phi(U) \longrightarrow k$ sei $\check{f}: U \longrightarrow k$ die Funktion

$$\check{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \neq 0 \\ f(0') & \text{falls } x=0 \end{cases}$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. f ist regulär.
2. $\check{f} \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$
3. $\phi^*(f) \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$.

Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(\phi(U)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(U)$, $f \mapsto \phi^*(f)$, ein Isomorphismus von k-Algebren.

2 ⇔ 3:

Die Bedingenen 2 und 3 sind äquivalent, weil $\phi^*(f) = f\circ\phi = \check{f}$ gilt.

3 ⇒ 1. Nach Voraussetzung ist

$$\phi^*(f) = f\circ\phi: U \longrightarrow k$$

regulär als Funktion auf der offenen Teilmenge U des $\mathbb{A}^1$. Weil die Menge {0} abgeschlossen ist, ist die Einschränkung

$$f\circ\phi|_{U-\{0\}} : U - \{0\} \longrightarrow k \tag{1}$$

ebenfalls regulär. Wegen $U - \{0\} = f(U) \cap \mathbb{A}^1$ und weil ϕ auf $U - \{0\}$ die identische Abbildung ist, ist (1) gerade die Abbildung

$$f|_{f(U)\cap\mathbb{A}^1}: U\cap\mathbb{A}^1 \longrightarrow k$$

Nach Definition bedeuter aber die Regularität letzterer zusammen mit der von $\phi^*(f)$, daß die Abbildung

$$f: \phi(U) \longrightarrow k$$

als Abbildung auf der offenen Mengen $\phi(U)$ von X regulär ist.

<u>1 ⇒ 3</u>: Die Regulärität von Funktionen auf offenen Mengen von X ist gerade so definiert, mit der ersten auch die dritte Bedingung erfüllt ist.
7. <u>Schritt</u>. X ist mit der Garbe der regulären Funktionen eine Prävarietät.
Nach Definition gilt

$$X = \mathbb{A}^1 \bigcup \phi(\mathbb{A}^1),$$

wobei $\mathbb{A}^1$ und $\phi(\mathbb{A}^1)$ offene Teilmengen von X sind.
Die durch X auf $\mathbb{A}^1$ induzierte Unterraum-Topologie ist nach dem dritten Schritt gerade die Zariski-Topologie des $\mathbb{A}^1$ und nach dem vierten und fünften Schrit ist die Einschränkung von $\mathcal{O}_X$ auf $\mathbb{A}^1$ gerade die Strukturgarbe der affinen Varietät $\mathbb{A}^1$. Mit anderen Worten $\mathbb{A}^1$ ist eine affine offene Menge von X.
Versehen wir $\phi(\mathbb{A}^1)$ mit der Unterraum-Topologie von X so wird die Bijektion

$$\phi\colon \mathbb{A}^1 \longrightarrow \phi(\mathbb{A}^1)$$

nach dem dritten Schritt zu einem Homöomorphismus (wenn man $\mathbb{A}^1$ mit der Zariski-Topologie versieht). Nach dem vierten und sechsten Schritt ist ϕ ein Isomorphismus geometrischer Räume

$$(\mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}) \longrightarrow (\phi(\mathbb{A}^1), \mathcal{O}_X|_{\phi(\mathbb{A}^1)}).$$

Man beachte, der Isomorphismus des sechsten Schritts bekommt mit V = $\phi(U)$ die Gestalt

$$\mathcal{O}_X(V) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(\phi^{-1}(V)).$$

Damit ist auch $\phi(\mathbb{A}^1)$ eine affine offene Menge von X. Wir haben gezeigt, der geometrische Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ besitzt eine Überdeckung durch affine offene Mengen, und ist somit eine Prävarietät.
8. <u>Schritt</u>. X ist keine Varietät.
Wir haben zu zeigen, die Menge

$$\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$$

ist nicht abgeschlossen. Der Grund dafür ist, daß die Punkte

$$(0, 0') \text{ und } (0',0)$$

nicht in Δ_X liegen (weil sie verschieden sind). Sie liegen aber sehr wohl in der Abschließung von Δ_X. Ein direkter Beweis ist am Ende des Beweises des ersten Schritts zur nachfolgenden Aufgabe 2 angegeben.

Wir wählen hier für den Nachweis dafür, daß X keine Varietät ist, einen anderen Weg. Nach 1.6.11 reicht es zu zeigen, es gibt eine Prävarietät Y und zwei Morphismen

$$f,g\colon Y \longrightarrow X,$$

die auf einer dicht liegenden Teilmenge von Y übereinstimmen und trotzdem nicht gleich sind. Wir setzen

$Y := X$
$f := \mathrm{Id}$

und

$$g(x) := \begin{cases} 0' & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x = 0' \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Abbildungen f und g haben in den Punkten von X-{0,0'} dieselben Werte, d.h. auf einer dicht liegenden offenen Menge von X. und sind trotzdem nicht gleich.
Die Abbildung f = Id ist offensichtlich ein Morphismus. Wir haben noch zu zeigen, daß auch g ein Morphismus ist.
Da g die Punkte 0 und 0' vertauscht und alle anderen Punkte in sich abbildet, ist g bijektiv. Der Raum X und die endlichen Teilmengen von X werden in X bzw. in endliche Teilmengen von X abgebildet, d.h. abgeschlossene Mengen gehen in abgeschlossen Mengen über (und damit auch offene in offene - wegen der Bijektivität von g). Damit ist g eine offene Abbildung. Da g zu sich selbst invers ist, ist auch g^{-1} offen, d.h. g ist offen und stetig. Wir haben gezeigt,

g ist ein Homöomorphismus mit $g^{-1} = g$.

Es reicht zu zeigen,

g ist ein Morphismus geometrischer Räume.

Seien $U \subseteq X$ eine offene Menge und $\alpha: U \longrightarrow k$ eine reguläre Funktion. Wir haben zu zeigen,

$$g^*(\alpha) = \alpha \circ g: g^{-1}(U) \longrightarrow k$$

ist regulär.
1. Fall. 0 und 0' liegen nicht in U.
Dann ist g auf U die identische Abbildung und $g^*(\alpha) = \alpha$, d.h. $g^*(\alpha)$ ist trivialerweise regulär.
2. Fall: $0 \in U \subseteq \mathbb{A}^1$.
Dann ist $g|_U = \phi|_U$ und nach Definition der Regularität auf X ist für jede stetige Funktion $\alpha: U \longrightarrow k$ die Verpflanzung

$$g^*(\alpha) = \phi^*(\alpha)$$

eine reguläre Funktion auf der offenen Teilmenge $\phi^{-1}(U)$ von $\mathbb{A}^1$. Nach dem fünften Schritt ist dann aber $g^*(\alpha)$ regulär als Funktion auf der offenen Menge $\phi^{-1}(U)$ von X.

3. Fall: $0' \in \phi(U') \subseteq \phi(\mathbb{A}^1)$
Nach dem sechsten Schritt folgt aus der Regularität von

$$\alpha: \phi(U') \longrightarrow k$$

die von

$$\check{\alpha}: U' \longrightarrow k$$

(als Funktion auf dern offenen Teilmenge U' von $\mathbb{A}^1$ und damit auch als Funktion auf der offenen Teilmenge U' von X). Weil g die Punkte 0 und 0' vertauscht (und nur diese), ist aber

$$\check{\alpha} = g^*(\alpha).$$

4. Fall: U beliebig.
Jede offene Menge U von X hat nach Definition der Topologie von X die Gestalt

$$U = V \cup \phi(V')$$

mit V und V' offen im $\mathbb{A}^1$. Die offene Menge V ist vom Typ des ersten oder zweiten Falls, die offene Menge $\phi(V')$ von Typ des ersten oder dritten Falls. Deshalb sind

$$g^*(\alpha|_V) = g^*(\alpha)|_{g^{-1}(V)}$$

und

$$g^*(\alpha|_{\phi(V')}) = g^*(\alpha)|_{g^{-1}(\phi(V'))}$$

reguläre Funktionen. Da die regulären Funktionen eine Garbe bilden, ist dann aber auch

$g^*(\alpha)$

regulär.

QED.

Aufgabe 2: Die projektive Gerade

Definieren Sie die projektive Gerade $\mathbb{P}^1$ in einer so ähnlichen Weise wie in Aufgae 1: mit

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$$

und der Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{A}^1 \longrightarrow X \text{ mit } \phi(x) := \begin{cases} x^{-1} & \text{falls } x \neq 0 \\ \infty & \text{falls } x=0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, $\mathbb{P}^1$ ist eine Varietät mit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) = k$. Zeigen sie außerdem, jeder Morphismus

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow X$$

mit Werten in einer affinen Varietät X ist konstant (Satz von Liouville).

Beweis. 1. <u>Schritt</u>. $\mathbb{P}^1$ ist eine Varietät.

Wir gehen in derselben Weise vor wie beim Beweis der Aussagen von Aufgabe 1. In den Schritten Schritte 1 bis 7 ist die Argumentation im wesentlichen dieselbe (wobei ϕ jetzt anders definiert ist). Wie in Aufgabe 1 erhalten wir, daß $\mathbb{P}^1$ die Vereinigung von zwei affinen offenen Mengen, sagen wir

$$\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2 ,$$

und damit eine Prävarietät ist.

Die zu den U_i, i = 1,2, gehörigen affinen Varietäten sind wie in Aufgabe 1 isomorph zur affinen Geraden, d.h. ihre affinen Koordinatenringe sind Polynomringe über k in einer Unbestimmten, sagen wir

$$k[U_i] = k[X_i] \text{ , } i = 1,2, X_i \text{ eine Unbestimmte.}$$

Ein Punkt mit der Koordinate t in der einen Umgebung hat, wenn er auch in der anderen Umgebung liegt, die Koordinate 1/t (in der Situation von Aufgabe 1 sind die Koordinaten dieselben). Die Koordinatenringe Produkte der U_i sind damit Polynomringe in zwei Unbestimmten sagen wir

$$k[U_i \times U_i] = k[X_i] \otimes_k k[X_i] = k[X_i, Y_j], X_i, Y_j \text{ zwei Unbestimmte.}$$

Wir haben zu zeigen,

$$\Delta_{\mathbb{P}^1} = \{(t, t) \mid t \in \mathbb{P}^1\} \text{ ist abgeschlossen in } \mathbb{P}^1.$$

Dazu reicht es zu zeigen,

$$\Delta_{\mathbb{P}^1} \cap (U_i \times U_j) \text{ ist abgeschlossen in } U_i \times U_j \text{ für } i, j \in \{1,2\}.$$ [62]

Im Fall i = j ist

[62] Wie am Ende des Beweises von 1.6.12 (ii) sieht man dann, daß auch $\Delta_{\mathbb{P}^1}$ abgeschlossen ist in $\mathbb{P}^1$.

$$\Delta_{\mathbb{P}^1} \cap (U_i \times U_i) = \{(x, x) \mid x \in U_i\}$$
$$= \{(x,y) \in U_i \times U_i \mid x = y\}$$
$$= \{(x,y) \in U_i \times U_i \mid \text{Koordinate von } x = \text{Koordinate von } y\}$$
$$= V_{U_i \times U_i}(X_i - Y_i),$$

d.h. $\Delta_{\mathbb{P}^1} \cap (U_i \times U_i)$ ist abgeschlossen in $U_i \times U_i$.

Im Fall $i \neq j$ ist

$$\Delta_{\mathbb{P}^1} \cap (U_i \times U_j) = \{(x, y) \in \mid x \in U_i, y \in U_j \text{ und } x = y\}$$
$$= \{(x,y) \in U_i \times U_i \mid \text{Koordinate von } x = (\text{Koordinate von } y)^{-1}$$

}

$$= V_{U_i \times U_i}(X_i \bullet Y_i - 1),$$

d.h. auch in diesem Fall ist $\Delta_{\mathbb{P}^1} \cap (U_i \times U_j)$ ist abgeschlossen in $U_i \times U_j$.

<u>Bemerkung</u>

Im Fall $i \neq j$ funktiioniert die Argumentation für die Situation der ersten Aufgabe nicht, denn dann ist

$$\Delta_{\mathbb{P}^1} \cap (U_i \times U_j) = \{(x, y) \in \mid x \in U_i, y \in U_j \text{ und } x = y\}$$
$$= \{(x,y) \in U_i \times U_i \mid \text{Koordinate von } x = \text{Koordinate von } y\} - \{(0,0'), (0',0)\}$$

Wir müssen hier die beiden Punkte (0,0') und (0',0) aus der Menge entfernen, denn sie sind verschieden, obwohl sie beide dieselbe Koordinate besitzen. Damit gilt

$$\Delta_{\mathbb{P}^1} \cap (U_i \times U_j) = V_{U_i \times U_i}(X_i = Y_i) - \{(0,0'), (0',0)\}.$$

Dies ist eine affine Gerade, aus der zwei Punkte entfernt wurden. Ihre Abschließung

$$\overline{\Delta_{\mathbb{P}^1} \cap (U_i \times U_j)} = V_{U_i \times U_i}(X_i = Y_i)$$

(vgl. Aufgabe 1.1.4 (1)) ist von der Menge selbst verschieden, d.h.

$$\Delta_{\mathbb{P}^1} \cap (U_i \times U_j) \text{ ist nicht abgeschlossen in } U_i \times U_j \text{ für } i \neq j.$$

2. <u>Schritt</u>. Jede reguläre Funktion $f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow k$ ist konstant.

Wir verwenden die Bezeichnungen des ersten Schritts. Sei eine reguläre Funktion

$$f: \mathbb{P}^1 \longrightarrow k$$

gegegben. Dann können wir die Einchränkgungen $f|_{U_1}$ und $f|_{U_2}$ als reguläre Funktionen auf der affinen Geraden $\mathbb{A}^1$ auffasssen. Der Koordinatenring des $\mathbb{A}^1$ ist ein Polynomring einer Unbestimmten, sagen wir

$$k[\mathbb{A}^1] = k[t].$$

Die beiden Funktionen $f|_{U_1}$ und $f|_{U_2}$ sind damit durch Polynome gegeben, sagen wir

$$P_1(t), P_2(t) \in k[t].$$

In den Punkten $x \in U_1 \cap U_2$ (einer nicht-leeren offenen und damit dichten Teilmenge des $\mathbb{A}^1$ haben diese Polynome denselben Wert f(x). Deshalb gilt

$$P_1(c) = P_2(1/c) \text{ für jedes } c \in k - \{0\}. \tag{1}$$

Sei $P_2(t)$ ein Polynom Grades

$$d := \deg P_2(t).$$

Dann ist auch $t^d \cdot P_2(1/t)$ ein Polynom. Wegen (1) ist das Polynom

$$t^d \cdot P_1(t) - t^d \cdot P_2(1/t)$$

auf der dichten offenen Teilmenge $k - \{0\}$ von $\mathbb{A}^1$ gleich Null. Weil $\mathbb{A}^1$ eine Varietät ist, muß das Polynom überall Null sein (nach 1.6.11(ii)), d.h. es gilt

$$t^d \cdot P_1(t) = t^d \cdot P_2(1/t) \text{ in } k[t].$$

Alle Glieder des Polynoms links sind Monome eines Grades $\geq d$. Alle Glieder des Polynoms rechts haben einen Grad $\leq d$. Durch Koeffizientenvergleich sehen wir, daß die einzigen von Null verschiedenen Glieder auf beiden Seiten den Grad d haben müssen. Deshalb sind P_1 und P_2 konstante Polynome mit demselben Absolutglied. Wir haben gezeigt, die reguläre Funktion f ist konstant.

3. <u>Schritt</u>. Jeder Morphismus $f:\mathbb{P}^1 \longrightarrow X$ mit Werten in einer affinen Varietät X ist konstant.

Wir betrachten die der Varietät X zugrundeliegende Punktmenge als Teilmenge des k^n, n geeignet gewählt,

$$X \hookrightarrow k^n.$$

Sei

$$x_i: k^n \longrightarrow k,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i,$$

die i-te Koordinatenfunktion. Dann ist die Einchränkung von x_i auf X ein reguläre Funfktion auf X. Weil f ein Morphismus ist, ist dann aber

$$f^*(x_i) = x_i \circ f: \mathbb{P}^1 \xrightarrow{f} X \xrightarrow{x_i} k,$$

eine reguläre Funktion auf $\mathbb{P}^1$, also nach dem zweiten Schritt konstant, sagen wir

$$x_i(f(x)) = c_i \in k \text{ für jedes } x \in \mathbb{P}^1.$$

Dies gilt für i = 1, ... , n, d.h. es ist

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1(f(x)) \\ \dots \\ x_n(f(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ für jedes } x \in \mathbb{P}^1.$$

Die Funktion f hat an allen Stellen denselben Wert.
QED.

Aufgabe 3: Die regulären Funktionen auf den offene Mengen des $\mathbb{A}^n$

(i) Sei $U \subseteq \mathbb{A}^n$ eine nicht-leere offene Teilmenge. Für jede reguläre Funktion

$$f: U \longrightarrow k$$

gibt es dann Polynome $g,h \in k[T_1,...,T_n]$ mit

$$h(x) \neq 0 \text{ und } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \text{ für jedes } x \in U.$$

(Hinweis: man schreibe U als Vereinigung von offenen Hauptmengen und verwende 1.4.6)

(ii) Sei $X := \mathbb{A}^n - \{0\}$ mit der zugehörigen Teil-Varietäten-Struktur von $\mathbb{A}^n$. Zeigen Sie, für $n \geq 2$ ist X keine affine Varietät.

Beweis. Zu (i) Weil die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis der Zariski-Topologie bilden, gilt

$$U = \bigcup_{i\in I} D(\varphi_i) \text{ mit Polynomen } \varphi_i \in k[T].$$

Wir können annehmen, die Mengen $D(h_i)$ sind sämtlich nicht-leer,

$$D(\varphi_i) \neq \varnothing \text{ für jedes } i \in I.$$

Insbesondere ist kein φ_i gleich 0,

$$\varphi_i \in k[T] - \{0\} \text{ für jedes } i \in I.$$

Nach 1.4.6 hat $f|_{D(\varphi_i)}$ die Gestalt

$$f(x) = \frac{g_i(x)}{\varphi_i^{n_i}(x)} \text{ für jedes } x \in D(\varphi_i) \text{ mit } g_i \in k[T]$$

Wir ersetzen φ_i durch $\varphi_i^{n_i}$. Dabei bleibt $D(\varphi_i)$ unverändert, und wir können schreiben

$$f(x) = \frac{g_i(x)}{\varphi_i(x)} \text{ für jedes } x \in D(\varphi_i).$$

Wenn g_i und φ_i einen gemeinsamen Teiler haben, so können wir diesen kürzen, ohne daß sich an diesen Identitäten entwas ändert. Dabei würde sich aber die Menge $D(\varphi_i)$ ändern. Wenn wir erreichen wollen, daß die Funktionen im Zähler und Nenner von f teilerfremd werden, müssen wir zulassem, daß die Nenner von den φ_i verschieden sind. Wir können annehmen, für jedes i gilt

$$f(x) = \frac{g_i(x)}{h_i(x)} \text{ für jedes } x \in D(\varphi_i) \text{ mit } g_i, h_i \in k[T],\ g_i, h_i \text{ teilerfremd und } h_i | \varphi_i$$

Für je zwei $i, j \in I$ gilt dann $\frac{g_i(x)}{h_i(x)} = f(x) = \frac{g_j(x)}{h_j(x)}$ für jedes $x \in D(h_i) \cap D(h_j)$, also

$$g_i(x) \cdot h_j(x) = g_j(x) \cdot h_i(x) \text{ für } x \in D(h_i) \cap D(h_j).$$

Weil $\mathbb{A}^n$ irreduzibel ist, ist der Durchschnitt von je zwei nicht-leeren offenen Teilmengen von $\mathbb{A}^n$ nicht leer. Deshalb ist $D(h_i) \cap D(h_j)$ eine nicht-leere offene Menge und sie liegt dicht in $\mathbb{A}^n$ (weil $\mathbb{A}^n$ irreduzibel ist). Weil $\mathbb{A}^n$ eine Varietät ist, folgt

$$g_i(x) \cdot h_j(x) = g_j(x) \cdot h_i(x) \text{ für jedes } x \in \mathbb{A}^n,$$

(nach 1.6.11 (ii)), also

$$g_i \cdot h_j = g_j \cdot h_i \text{ in } k[T].$$

Weil g_i und h_i teilerfremd sind für jedes $i \in I$ folgt $h_i \mid h_j$ und analog $h_j \mid h_i$. Das bedeutet, h_i und h_j unterscheiden sich nur um einen konstanten (von Null verschiednen Faktor). Wir wählen ein $i \in I$ und setzen

$$h := h_i \text{ und } g = g_i$$

und erhalten

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \text{ für jedes } x \in U \text{ und } h \mid \varphi_i \text{ für jedes } i \in I.$$

Wenn eines der φ_i an der Stelle x ungleich Null ist, so wegen $h \mid \varphi_i$ auch h an der Stelle x ungleich Null, d.h. es gilt

$$U = \bigcup_{i\in I} D(\varphi_i) \subseteq D(h),$$

d.h. h ist in jedem Punkt von U ungleich Null.

<u>Zu (ii)</u>. Nach (i) hat jede reguläre Funktion auf der offenen Menge

$$X := \mathbb{A}^n - \{0\}$$

des $\mathbb{A}^n$ die Gestalt

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \text{ für jedes } x \in X$$

mit Polynomen $g, h \in k[T]$, wobei h in keinem Punkt von X gleich Null ist. Für $n \geq 2$ hat aber jedes nicht-konstante Polynom in k^n ch viele Nullstellen[63]. Deshalb muß h konstant sein, d.h. jede reguläre Funktion auf X ist durch ein Polynom gegeben,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(X) \quad = k[T]$$

Nehmen wir jetzt an, X ist eine affine Varietät. Dann ist der Koordinatenring von X gleich

$$k[X] \quad = k[T].$$

---

[63] Hierbei ist wesentlich, daß k als algebraisch abgeschlossener Körper unendlich ist und jedes nicht-konstante Polynom in einer Unbestimmten nur endlich viele Nullstellen hat:

- Jedes nicht-konstante Polynom in einer Unbestimmten ist somit an unendlich vielen Stellen ungleich Null.
- Jedes nicht-konstante Polynom in zwei Unbestimmten, sagen wir x und y, ist ebenfalls an unendlich vielen Stellen ungleich Null: man betrachte es als Polynom in y, dessen Koeffizienten Polynome in x sind. Man kann zunächst unendlich viele Werte von x wählen, für welche alle Koeffiziengen ungleich Null sind. Für jedes solche x gibt es dann unendlich viele y, für welche das Polynom ungleich Null ist.
- Durch Wiederholen des obigen Arguments zeigt man, daß jedes nicht-konstante Polynom in n Unbestimmten in unendlich vielen Punkten des k^n ungleich Null ist.
- Für $n \geq 2$ kann man das Polynom P in, sagen wir $T_1,...,T_n$ als Polynom in T_n betrachten, dessen Koeffizienten Polynome in $T_1,...,T_{n-1}$ sind. Durch Ändern der Reihenfolge der T_i erreicht man, daß der Grad von P bezüglich T_n nicht Null ist. Dann kann man für $T_1,...,T_{n-1}$ unendlich viele (n-1)-Tupel von k^{n-1} einsetzen, für die alle Koeffizienten des Polynoms in T_n ungleich Null sind. Man erhält ein nicht-konstantes Polynom in einer Unsbestimmten, welches in k eine Nullsstelle besitzt.

Dieser Koordinatenring wird von $T_1, \ldots , T_n$ erzeugt. Deshalb ist das Bild von X bei der Abbildung

$$\varphi:X = k^n\text{-}\{0\} \longrightarrow k^n,\ x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

(d.h. bei der identischen Abbildung) nach Bemerkung 1.3.1 (iii) Nullstellenmenge einer Menge $M \subseteq k[T]$ von Polynomen:

$$X = \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ für } f \in M \}.$$

Nun ist X eine nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{A}^n$ und liegt - weil $\mathbb{A}^n$ irreduzibel ist - dicht im $\mathbb{A}^n$. Eine reguläre Funktion

$$f: \mathbb{A}^n \longrightarrow k,$$

welche auf X gleich Null ist, stimmt auf der dichten Teilmenge X mit der Nullfunktion überein, ist also gleich 0 (nach 1.6.11(ii)). Deshalb kann die Menge M nur aus der Null-Funktion bestehen, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} X &= \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \text{ für } f \in \{0\} \} \\ &= k^n. \end{aligned}$$

Das steht aber im Widerspruch zur Definition $X = k^n - \{0\}$ von X. Dieser Widerspruch zeigt, daß X keine affine Varietät sein kann für $n \geq 2$.
QED.

1.6.14 F-Strukturen

Seiem F ein Teilkörper von k und X eine k-Varietät. Eine <u>F-Struktur</u> auf X ist gegeben durch eine Familie von offenen Mengen von X, welche <u>F-offene Teilmengen</u> von X genannt werden, mit folgenden Eigenschaften.

1. Die F-offenen Teilmengen von X sind die offenen Teilmengen einer Topologie von X.
2. Die F-offenen Teilmengen von X, welche gleichzeitig affine offene Mengen von X sind, überdecken X (sie werden auch <u>affine F-offene Teilmengen</u> von X genannt).
3. Jede affine F-offene Teilmengen ist mit der Struktur einer affinen F-Varietät versehen.
4. Sind U und V zwei affine F-offene Teilmengen von X mit $V \subseteq U$, so ist der Einschränkungsmorphismus $U \longrightarrow V$ über F definiert (d.h. ein F-Morphismus von affinen F-Varietäten im Sinne von 1.4.9).

Wir nennen dann X eine <u>F-Varietät</u>.

Seien X und Y zwei F-Varietäten und $\phi: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von k-Varietäten. Dann sagen wir, ϕ ist <u>definiert über</u> F oder auch ein <u>F-Morphismus</u>, wenn für jede F-offene Menge $V \subseteq Y$ die Menge $U := \phi^{-1}(V)$ eine F-offene Menge von X ist und der induzierte Morphismus $U \longrightarrow V$ ein F-Morphismus von affinen F-Varietäten im Sinne von 1.4.9 A ist.

Eine <u>F-Teilvarietät</u> einer F-Varietät ist eine Teilvarietät Y einer Varietät X, für welche die natürliche Einbettung $Y \hookrightarrow X$ ein F-Morphismus ist.

1.6.15 Verheftung von affinen F-Varietäten

Zur Definition einer F-Struktur auf einer k-Varietät sind die folgenden Daten ausreichend.

1. Ein Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von X durch affine offene Teilmengen.
2. Eine F-Struktur auf jedem U_i.
3. Eine F-Struktur auf jedem der Durchschnitte $U_i \cap U_j$ mit $i,j \in I$, für welche die

natürlichen Einbettungen $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$ über F definiert sind.
Eine offene Teilmenge von X wird dann als F-offen definiert, wenn ihr Durchschnitt mit allen U_i eine F-offene Teilmenge von U_i ist. Man erhält dann eine F-Varietät im Sinne von 1.6.14.

1.6.16 F-rationale Punkte von F-Varietäten, Produkte

Sei X eine F-Varietät. Dann ist die Menge X(F) der F-rationalen Punkte definiert als die Menge der F-Morphismen

$$\mathbb{A}^0 \longrightarrow X$$

(vgl. 1.4.9).
Sind X und Y zwei F-Varietäten, so besitzt das Produkt X×Y auf genau eine Weise die Struktur einer F-Varietät, bei der die natürlichen Projektionen

$$X\times Y \longrightarrow X \text{ und } X\times Y \longrightarrow Y$$

über F definiert sind.

1.6.17 Aufgaben

Aufgabe 1

Man überprüfe die in 1.6.15 und 1.6.16 gemachten Aussagen.

Aufgabe 2

Ein Morphismus ϕ: $X \longrightarrow Y$ von F-Varietäten X und Y ist genau dann über F definiert, wenn der Graph von ϕ (vgl. 1.6.11 (i)) eine abgeschlossene F-Teilvarietät der F-Varietät X×Y ist (vgl. 1.6.16).

Aufgabe 3

Sei X eine k-Varietät. Dann gibt es eine F-Struktur auf X für einen Teilkörper $F \subseteq k$, welcher eine endlich erzeugte Körpererweiterung des Primkörpers von k ist,

1.7 Projektive Varietäten

Die wichtigsten Beispiele für nicht-affine Varietäten - und praktisch die einzigen, denen wir weiterhin begegnen werden - sind die projektiven Räume und deren Teilvarietäten, welche in diesem Abschnitt untersucht werden sollen.

1.7.1 Der projektive Raum $\mathbb{P}^n$

Die dem n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ (kurz auch projektiver n-Raum) zugrundeliegende Menge ist die Menge

$$\mathbb{P}^n := \{ g \subseteq k^{n+1} \mid g \text{ ist k-linearer Unterraum der Dimension 1 von } k^{n+1} \}$$

der eindimensionalen k-linearen Unterräume des k-Vektorraums k^{n+1}, d.h. die Menge der Geraden durch den Ursprung von k^{n+1}. Eine alternative Beschreibung ist die als Menge der Orbits,

$$\mathbb{P}^n := k^{n+1} - \{0\}/k^*,$$

der Operation

$$k^* \times k^{n+1} - \{0\} \longrightarrow k^{n+1} - \{0\},\ (c, v) \mapsto c\bullet v,$$

der multiplikativen Gruppe k^* von k auf $k^{n+1} - \{0\}$ oder die als Menge der Äquivalenzklassen,

$$\mathbb{P}^n := k^{n+1} - \{0\}/\sim$$

der Punkte von $k^{n+1} - \{0\}$ bezüglich der Äquivalenz-Relation

$x \sim y \Leftrightarrow$ es gibt ein $c\in k^*$ mit $y = c\bullet x$.

Ist $x = (x_0,x_1,...,x_n) \in k^{n+1} - \{0\}$, so schreiben wir[64]

$$[x] = [x_0,x_1,...,x_n]$$

für die Äquivalenzklasse des Punktes x und nennen $x_0,x_1,...,x_n$ die <u>projektiven Koordinaten</u> von $[x]$.

Vereinbarung
Im folgenden werden wir den Polynomring

$$k[T_0,...,T_n]$$

als Koordinatenring des affinen Raums A^{n+1} verwenden. Die Unbestimmte T_i soll dabei mit der Abbildung

$$T_i: k^{n+1} \longrightarrow k,\ (x_0,x_1,...,x_n) \mapsto x_i\ ,$$

identifiziert werden, die jeden Punkt auf seine i-te Koordinate abbildet. Wir schreiben dann

$$T_i(x) = x_i$$

Dieser Wert hängt vom Repräsentanten x ab. $T_i([x])$ ist nicht definiert. Wir benötigen die T_i jedoch zur Beschreibung von Funktionen auf Teilmengen des $\mathbb{P}^n$.

So hängt zum Beispiel in den Punkten des $\mathbb{P}^n$ mit von Null verschiedener i-ter projektiver Koordinate, d.h. in den Punkten von

$$U_i := \{[\, x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

der Wert der Funktionen $\frac{T_j}{T_i}$ nur von der Äquivalenzklasse $[x]$ von x ab,

$$\frac{T_j}{T_i}((c\bullet x_0,\ c\bullet x_1,...,\ c\bullet x_n)) = \frac{c\bullet x_j}{c\bullet x_i} = \frac{x_j}{x_i} = \frac{T_j}{T_i}((x_0,\ x_1,...,\ x_n)) \text{ für jedes } c\in k^*.$$

Deshalb ist

$$\frac{T_j}{T_i}([x_0,x_1,...,x_n]) := \frac{x_j}{x_i}$$

ist eine korrekte Definition und $\frac{T_j}{T_i}$ ist eine wohldefinierte Funktion $U_i \longrightarrow k$.

Bemerkungen

---

[64] Im Original wird die Bezeichnung $x^* = (x_0,x_1,...,x_n)^*$ verwendet.

(i) Eine Überdeckung des $\mathbb{P}^n$.
Sei
$$U_i := \{[x_0,...,x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$
für i = 1, ... , n. Dann gilt
$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup ... \cup U_n.$$

(ii) Die Mengen U_i als Kopien des $\mathbb{A}^n$.
Jede der Mengen U_i können wir mit dem $\mathbb{A}^n$ identifizieren vermittels der Abbildung
$$\phi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n, [x_0,...,x_n] \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, ... , \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}).$$
Die Struktur des $\mathbb{A}^n$ als affine Varietät läßt sich so auf die Menge U_i übertragen, welche so zu einer affinen Varietät mit dem Koordinatentring
$$k[U_i] = k[\frac{T_0}{T_i}, ... , \frac{T_n}{T_i}]$$
wird.

(iii) Beschreibung der Durchschnitte $U_i \cap U_j$.
Für je zwei Indizes i, j $\in$ {0, ... , n} ist
$$\phi_i(U_i \cap U_j) = \{(x_0,..., x_{i-1}, x_{i+1},...,x_n) \in \mathbb{A}^n \mid x_j \neq 0\} = D(x_j)$$
eine offene Hauptmenge.

(iv) Die Topologie des $\mathbb{P}^n$. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}^n$ heiße offen, wenn der Durchschnitt $U \cap U_i$ für i = 0, ... , n eine offene Teilmenge der affinen Varietät U_i ist. Auf diese Weise wird der $\mathbb{P}^n$ zu einem topologischen Raum.

(v) Die Unterraum-Topologie der U_i als Teilmengen des $\mathbb{P}^n$ ist gerade die Zariski-Topologie der affinen Varietät U_i.

(vi) Regularität der Koordinatenwechsel Abbildungen. Für je zwei i, j $\in$ {0, ... , n} ist die Abbildung
$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$
eine reguläre Abbildung von offenen Mengen des $\mathbb{A}^n$.

(vii) Seien $U \subseteq U_i \cap U_j$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{P}^n$, $x \in U$ ein Punkt und
$$f: U \longrightarrow k$$
eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.
1. f ist als Funktion auf der offenen Teilmenge U der affinen Varietät U_i regulär im Punkt x.
2. f ist als Funktion auf der offenen Teilmenge U der affinen Varietät U_j regulär im Punkt x.

(viii) Seien $U \subseteq \mathbb{P}^n$ eine offene Teilmenge, $x \in U$ ein Punkt und $f{:}U \longrightarrow k$ eine Funktion. Dann sagen wir, f ist <u>regulär</u> im Punkt U, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

1. Es gibt ein i mit
$$x \in U_i \cap U,$$
für welches die Einschränkung $f|_{U_i\cap U}: U_i\cap U \longrightarrow k$ als Funktion auf der offenen Teilmenge $U_i\cap U$ der affinen Variatät U_i regulär ist im Punkt x.
2. Für jedes i mit
$$x \in U_i \cap U$$
ist die Einschränkung $f|_{U_i\cap U}: U_i\cap U \longrightarrow k$ als Funktion auf der offenen Teilmenge $U_i\cap U$ der affinen Variatät U_i regulär im Punkt x.

Die Funktion $f: U \longrightarrow k$ nenen wir <u>regulär</u>, wenn sie in jedem Punkt von x regulär ist. Wir bezeichnen mit
$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$$
die Menge der regulären Funktionen $U \longrightarrow k$.

(ix) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$ ist bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Funktionen $U \longrightarrow k$ eine k-Algebra. Die Abbildung
$$U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$$
ist bezüglich der gewöhnlichen Einschränk von Abbildungen eine Garbe auf $\mathbb{P}^n$.

(x) Der geometrische Raum $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ ist ein Prävarietät.

(xi) Der geometrische Raum $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ ist ein Varietät. Er heißt <u>n-dimensionaler projektiver Raum</u> oder auch <u>projektiver n-Raum</u>. Eine <u>projektive Varietät</u> ist eine abgeschlossene Teilvarietät eines $\mathbb{P}^n$, d.h. eine abgeschlossene Teilmenge mit der induzierten Struktur einer Varietät. Eine <u>quasi-projektive Varietät</u> ist eine offene Teilvarietät einer projektiven Varietät.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Für jeden Punkt $[x_0,...,x_n]$ des $\mathbb{P}^n$ ist mindestens ein x_i ungleich Null, d.h. der Punkt liegt in einem U_i.

<u>Zu (ii)</u>. Man beachte, die Abbildung ist wohldefiniert: bei Multiplikation aller x_i mit einem $c\in k^*$ bleibt das n-Tupel ganz rechts unverändert. Die Abbildung ist bijektiv mit der Inversen
$$\phi_i^{-1}: \mathbb{A}^n \longrightarrow U_i,\ (x_0,..., x_{i-1}, x_{i+1},...,x_n) \mapsto [x_0,...,x_{i-1}, 1, x_{i+1},...,x_n].$$
Die Projektion $T_j{:}\mathbb{A}^n \longrightarrow k$ auf die j-te Koordinate $(j=0,...,i-1,i+1,...,n)$ wird durch Verpflanzung entlang ϕ_i zur Abbildung $\frac{T_j}{T_i}: U_i \longrightarrow k$. Die Verpflanzung entlang ϕ_i definiert so einen Homomorphismus von k-Algebren

$$\phi_i^*: k[\mathbb{A}^n] \longrightarrow k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}] .$$

Die Verflanzung entlang ϕ_i^{-1} definiert eine Abbildung in umgekehrter Richtung, welche invers ist zu ϕ_i^*, d.h. ϕ_i^* ist ein Isomorphismus von k-Algebren und

$$k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}]$$

gerade der Koordinatenring der affinen Varietät U_i.

Zu (iii). Für $[x] \in U_i$ können wir den Repräsentanten x stets so wählen, daß die i-te Koordinate von x gleich 1 ist. Der Wert von ϕ_i an der Stelle [x] ist dann

$$\phi_i([x]) = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

wobei die Koordinaten rechts beliebige Werte annehmen können. Wenn [x] auch in U_j liegen soll, so bedeutet dies gerade, daß die x_j ungleich Null sein soll.

Zu (iv). Der Durchschnitt der leeren Menge mit U_i ist die leere Menge, also offen in U_i. Der Durchschnitt des $\mathbb{P}^n$ mit U_i ist U_i, also offen in U_i. Damit sind die leeere Menge und der $\mathbb{P}^n$ offen im $\mathbb{P}^n$.

Der Durchschnitt von zwei offenen Mengen des $\mathbb{P}^n$ mit U_i sich als Durchschnitt von zwei offenen Mengen von U_i schreiben, ist also offen in U_i. Damit ist der Durchschnitt von zwei offenen Mengen des $\mathbb{P}^n$ offen im $\mathbb{P}^n$.

Eine analoge Argumentation bezüglich der Vereinigung offener Mengen des $\mathbb{P}^n$ zeigt, daß auch das verbleibende Topologie-Axiom für $\mathbb{P}^n$ erfüllt ist.

Zu (v). Wegen (iii) ist $U_i \cap U_j$ offen in U_i, d.h. alle U_j sind offen im $\mathbb{P}^n$. Nach Definition ist jede im $\mathbb{P}^n$ offene Teilmenge $U \subseteq U_i$ offen in der affinen Varietät U_i. Wir haben zu zeigen, daß auch die Umkehrung dieser Aussage gilt. Zum Beweis reicht es zu zeigen, jede offene Hauptmenge

$$\begin{aligned} D(f) &= \{ [x] \in U_i \mid f(x) \neq 0 \} , f \in k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}] \\ &= \{ [x] \in \mathbb{P}^n \mid T_i(x) \neq 0 \text{ und } f(x) \neq 0 \} \end{aligned}$$

der affinen Varietät $U_i = \mathbb{A}^n$ ist auch offen im $\mathbb{P}^n$, d.h.

$$\begin{aligned} D(f) \cap U_j &= \{ [x] \in \mathbb{P}^n \mid T_i(x) \neq 0 \text{ und } T_j(x) \neq 0 \text{ und } f(x) \neq 0 \} \\ &= \{ [x] \in U_j \mid T_i(x) \neq 0 \text{ und } f(x) \neq 0 \} \end{aligned}$$

ist offen in U_j für jedes j. Weil $T_j(x)$ ungleich 0 ist für $[x] \in U_j$ gilt auch

$$D(f) \cap U_j = \{ [x] \in U_j \mid \frac{T_i}{T_j}(x) \neq 0 \text{ und } (\left(\frac{T_i}{T_j}\right)^s \bullet f)(x) \neq 0 \}$$

mit einer beliebig wählbaren nicht negativen ganzen Zahl s. Als Polynom in den $\frac{T_\nu}{T_i}$ können wir f auch in der Gestalt

$$f = f(\frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_n}{T_i}) = f(\frac{T_0/T_j}{T_i/T_j}, \ldots, \frac{T_n/T_j}{T_i/T_j})$$

schreiben. Wählt s hinreichend groß so wird das Produkt

$$g := \left(\frac{T_i}{T_j}\right)^s \bullet f \in k[\frac{T_0}{T_j}, \ldots, \frac{T_n}{T_j}]$$

ein Polynom, in welchem $\frac{T_i}{T_j}$ nicht mehr im Nenner auftritt. Der Durchschnitt $D(f) \cap U_j$ wird so zu einem Durchschnitt von offenen Hauptmengen von U_j,

$$D(f) \cap U_j = D(\frac{T_i}{T_j}) \cap D(g) \text{ mit } g \in k[\frac{T_0}{T_j}, \ldots, \frac{T_n}{T_j}],$$

und damit eine offene Menge von U_j. Wir haben gezeigt $D(f) \cap U_j$ ist für jedes j offen in U_j, d.h. D(f) ist offen im $\mathbb{P}^n$.

<u>Zu (vi)</u>. Die beiden Mengen $\phi_j(U_i \cap U_j)$ und $\phi_i(U_i \cap U_j)$ sind nach (iii) offen im $\mathbb{A}^n$: es sind gerade die offenen Hauptmengen $D(x_i)$ bzw. $D(x_j)$,

$$\phi_j(U_i \cap U_j) = D(x_i) \text{ und } \phi_i(U_i \cap U_j) = D(x_j).$$

Nach Definition gilt

$$\phi_i:([x_0,\ldots,x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}).$$

Wie wir im Beweis von (i) gesehen haben ist

$$\phi_j^{-1}(x_0,\ldots, x_{j-1}, x_{j+1},\ldots,x_n) = [x_0,\ldots,x_{j-1}, 1, x_{j+1},\ldots,x_n].$$

Die Koordinatenfunktionen der Zusammensetzung $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ haben damit die Gestalt $\frac{x_\nu}{x_i}$ und sind damit reguläre Funktionen auf $D(x_i)$. Damit ist aber $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ eine auf $D(x_i)$ reguläre Abbildung.

<u>Zu (vii)</u>. Die erste Bedingung ist äquivalent zur Regularität im Punkt $\phi_i(x)$ der Funktion

$$f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U) \longrightarrow k,$$

die zweite zur Regularität im Punkt $\phi_j(x)$ der Funktion

$$f \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U) \longrightarrow k.$$

Nun ist die zweite Funktion gerade die Zusammensetzung von $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ mit der ersten. Wegen der Regularität von $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ (nach (vi)) folgt damit aus der Regularität der ersten Funktion die der zweiten. Wir können i und j vertauschen und sehen so, daß aus der

Regularität der zweiten Funktion auch die der ersten folgt. Die beiden Bedingungen sind also äquivalent.

Zu (viii). Die Äquivalenz der beiden Bedingungen ergibt sich aus der Äquivalenz der beiden Bedingungen von (vii) und der Tatsache, daß eine Funktion $f:U \longrightarrow k$ auf einer offenen Teilmenge U einer affinen Varietät im Punkt $x \in U$ genau dann regulär ist, wenn die Einschränkung von f auf irgendeine offene Umgebung von x es ist.

Zu (ix). Weil Summe und Produkt zweier regulärer Funktionen $U \longrightarrow k$ auf einer offenen Teilmenge U einer affinen Varietät regulär sind, gilt dieselbe Aussage auch für den Fall einer regulären Funktion auf einer offenen Teilmenge U des $\mathbb{P}^n$ (wegen der Äquivalenz der Bedingungen von (viii)). Deshalb hat $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$ die Struktur einer k-Algebra. Für offene Teilmengen U, V des $\mathbb{P}^n$ mit $U \subseteq V$ ist die Einschränkung einer regulären Funktion $U \longrightarrow k$ auf V eine reguläre Funktion auf U (ebenfalls wegen (viii)). Deshalb definiert die Einschränkung auf U einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U),$$

so daß $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ die Struktur einer Garbe hat.

Zu (x). Nach (i) gilt

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup \ldots \cup U_n.$$

und nach (iii) hat jedes U_i die Struktur einer affinen Varietät über k. Die Topologie von U_i als affine Varietät ist gerade die Unterraum-Topologie der Teilmenge U_i von $\mathbb{P}^n$ (nach (v)). Eine Funktion $f: U \longrightarrow k$ auf einer Teilmenge von U_i ist genau dann regulär (als Funktion auf einer offenen Teilmenge U von U_i), wenn sie es als Funktion auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{P}^n$ ist (nach (viii)). Deshalb ist für jedes i die Einschränkung

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i}$$

gerade die Strukturgarbe der affinen Varietät U_i. Deshalb ist U_i für jedes i eine affine offene Teilmenge von $\mathbb{P}_n$ und $\mathbb{P}_n$ besitzt eine Überdeckung durch affine offene Teilmengen (nach (i)). Mit anderen Worten, $\mathbb{P}_n$ ist eine Prävarietät.

Zu (xi). Es reicht zu zeigen, daß die Bedingungen von 1.6.12 (ii) für die Überdeckung

$$\mathbb{P}^n = U_0 \cup \ldots \cup U_n.$$

erfüllt sind. Die erste Bedingung ist auf Grund von (iii) erfüllt: die Durchschnitte

$$U_i \cap U_j$$

sind affine offene Mengen von $\mathbb{P}^n$ für je zwei Indizes i und j (als offene Hauptmengen von affinen offenen Mengen). Wir haben noch zu zeigen, daß die Bilder der Restriktionen

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i \cap U_j) \text{ und } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_j) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i \cap U_j)$$

die Algebra $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_i \cap U_j)$ über k erzeugen (für je zwei Indizes i und j).

Der Koordinatenring der affinen Varietät U_i ist der Polynomring, welcher erzeugt wird von den Funktion, die aus den Koordinaten-Funktionen $x_\nu:\mathbb{A}^n \longrightarrow k$ durch Verpflanzung entlang ϕ_i entstehen, d.h.

$$k[U_i] = k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}] \quad (\subseteq k(T_0, \dots, T_n))$$

(vgl. (ii)). Der Durchschnitt $U_i \cap U_j$ ist gerade die offene Hauptmenge $D(\frac{T_j}{T_i})$, d.h.

$$k[U_i \cap U_j] = k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}]_{T_j/T_i} = k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}, \frac{T_i}{T_j}]$$

und die erste der beiden Restriktionsabbildungen ist die natürliche Einbettung

$$k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}] \hookrightarrow k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}, \frac{T_i}{T_j}]$$

Die zweite Restriktions Abbildung erhalten wir aus der ersten, indem wir i und j vertauschen:

$$k[\frac{T_0}{T_j}, \dots, \frac{T_n}{T_j}] \hookrightarrow k[\frac{T_0}{T_j}, \dots, \frac{T_n}{T_j}, \frac{T_j}{T_i}]$$

Man beachte, es die beiden k-Algebren auf der rechten Seite sind gleich:

$$k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}, \frac{T_i}{T_j}] = k[\frac{T_0}{T_j}, \dots, \frac{T_n}{T_j}, \frac{T_j}{T_i}]$$

(wegen $\frac{T_\nu}{T_j} \bullet \frac{T_j}{T_i} = \frac{T_\nu}{T_i}$ gilt "$\subseteq$" und wegen $\frac{T_\nu}{T_i} \bullet \frac{T_i}{T_j} = \frac{T_\nu}{T_j}$ gilt "$\supseteq$"). Wir haben zuzeigen, die k-Algebra

$$A := k[\frac{T_0}{T_j}, \dots, \frac{T_n}{T_j}, \frac{T_j}{T_i}]$$

wird von den beiden Teilalgebren

$$k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}] \text{ und } k[\frac{T_0}{T_j}, \dots, \frac{T_n}{T_j}]$$

über k erzeugt. Das ist aber tatsächlich der Fall, denn die ersten n+1 Erzeuger

$$\frac{T_0}{T_j}, \dots, \frac{T_n}{T_j}$$

von A liegen in der zweiten Teilalgebra und der verbleibende Erzeuger $\frac{T_j}{T_i}$ in der ersten.

QED.

1.7.2 Aufgaben

Aufgabe 1

Eine umkehrbare k-lineare Abbildung des k^{n+1} induziert einen Automorphismus des $\mathbb{P}^n$, d.h. einen Isomorphismus des $\mathbb{P}^n$ mit sich selbst.

Beweis. 1. Schritt. Konstruktion einer Abbildung $[\phi]: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$

Seien $A = (a_{ij}) \in k^{(n+)\times(n+1)}$ eine umkehrbare Matrix und

$$\phi: k^{n+1} \longrightarrow k^{n+1}, x \mapsto xA,$$

die zugehörige k-lineare Abbildung[65]. Für $c \in k - \{0\}$ gilt dann

$$\phi(c\bullet x) = c\bullet f(x),$$

Weil ϕ umkehrbar ist, ist für $x \neq 0$ auch $\phi(x) \neq 0$, d.h. $[\phi(x)]$ ist definiert und es gilt

$$\begin{aligned}[\phi(c\bullet x)] &= [c\bullet\phi(x)] \\ &= [\phi(x)].\end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse von $\phi(x)$ hängt also nur von der Äquivalenzklasse von x ab, d.h.

$$[\phi]: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n, [x] \mapsto [\phi(x)]$$

ist eine wohldefinierte Abbildung.

2. Schritt. Die Abbildung $[\phi]: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ist ein Morphismus geometrischer Räume.

Wir haben zu zeigen, für jede reguläre Funktion

$$f: W \longrightarrow k$$

auf einer offenen Menge $W \subseteq \mathbb{P}^n$ ist $[\phi]^{-1}(W)$ offen im $\mathbb{P}^n$ und

$$[\phi]^*(f) = f\circ[\phi]: [\phi]^{-1}(W) \longrightarrow k$$

eine reguläre Funktion. Dazu reicht es zu zeigen, für jeden Punkt

$$[a] \in [\phi]^{-1}(W)$$

liegt eine ganze offene Umgebung von [a] in $[\phi]^{-1}(W)$ und

$$f\circ[\phi] \text{ ist regulär in } [\phi]([a]).$$

Wir verwenden die Bezeichnungen U_i und ϕ_i der Bemerkungen von 1.7.1 für die Mengen

$$U_i = \{[x] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

und die Abbildungen

$$\phi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n, [x_0,\ldots,x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

mit den Umkehrungen

$$\phi_i^{-1}: \mathbb{A}^n \longrightarrow U_i, (x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \mapsto [x_0,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n]$$

Wir wählen Indizes i und j derart, daß gilt

$$[a] \in U_i \text{ und } [\phi]([a]) \in U_j.$$

Wir haben zu zeigen, die Abbildung ϕ bildet eine offene Umgebung $U \subseteq U_i$ von [a] in die offene Umgebung U_j von $[\phi]([a])$ ab und die Zusammensetzung

$$\phi_j\circ[\phi]\circ\phi_i^{-1}: \phi_i(U) \longrightarrow \phi_j(U_j)$$

ist regulär in $\phi_i([a])$.

---

[65] Wir schreiben in Anlehnung an die Bezeichnungsweise von T.A.Springer die Punkte des k^{n+1} als Zeilenvektoren.

Nach Definition von $[\phi]$ und ϕ_i gilt auf der offenen Menge $\phi_i(W\cap U_i)$ des $\mathbb{A}^n$:

$$[\phi]\circ\phi_i^{-1}(x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n) = [\phi]([x_0,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n])$$
$$= [\phi(x_0,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)] \qquad \text{(Definition von } [\phi])$$
$$= [(x_0,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)A] \qquad \text{(Definition von } \phi)$$
$$= [p_0(x),..., p_n(x)]$$

Dabei bezeichne p_ν für $\nu = 0, ... , n$ die ν-te Koordinate von

$$\phi(x_0,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)$$

d.h. das lineare Polynom

$$p_\nu(x) := \nu\text{-te Koordinate von } \phi(x_0,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)$$
$$= \nu\text{-te Koordinate von } (x_0,...,x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n)A$$
$$= x_0a_{0\nu} +...+x_{i-1}a_{i-1,\nu}+a_{i\nu}+x_{i+1}a_{i+1,\nu}+...+x_na_{n\nu}$$

Nach Wahl von j liegt der Punkt

$$[p_0(\phi_i([a])),..., p_n(\phi_i([a]))] = [\phi]\circ\phi_i^{-1}(\phi_i([a])) = [\phi]([a])$$

in U_j, d.h. das lineare Polynom

$$p_j(x)$$

ist an der Stelle $\phi_i([a])$ von Null verschieden. Die offene Hauptmenge $D(p_j) \subseteq U_i = \mathbb{A}^n$ enthält den Punkt $\phi_i([a])$. Damit ist Menge

$$U := W\cap U_i\cap \phi_i^{-1}(D(p_j))$$

eine offene Umgebung von [a]. Nach Definition von p_j ist die j-te Koordinate der Punkte von

$$[\phi](U) \subseteq [\phi](\phi_i^{-1}(D(p_j))) = \{ [xA] \in \mathbb{P}^n \mid x_i = 1 \text{ und } p_j (x) \neq 0 \}$$

ungleich Null, d.h. es gilt

$$[\phi](U) \subseteq U_j$$

Als Abbildungsvorschrift von $\phi_j\circ[\phi]\circ\phi_i^{-1}$ auf $\phi_i(U)$ erhalten wir

$$\phi_j\circ[\phi]\circ\phi_i^{-1}(x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n) = \phi_j([(p_0(x),...,p_n(x))]) \quad \text{(siehe oben)}$$
$$= \left(\frac{p_0(x)}{p_j(x)}, ... , \frac{p_{i-1}(x)}{p_j(x)}, \frac{p_{i+1}(x)}{p_j(x)}, ..., \frac{p_n(x)}{p_j(x)}\right)$$

Weil p_j in den Punkten von $\phi_i(U) = \phi_i(W\cap U_i)\cap D(p_j) \subseteq D(p_j)$ ungleich Null ist, ist dies eine reguläre Funktion auf $\phi_i(U)$.

3. <u>Schritt</u>. Die Abbildung $[\phi]: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ist ein Automorphismus des $\mathbb{P}^n$.

Wir können in den obigen Betrachtungen die umkehrbare Matrix $A \in k^{(n+)\times(n+1)}$ durch deren Inverses ersetzen und die Abbildung

$$\psi: k^{n+1} \longrightarrow k^{n+1}, x \mapsto xA^{-1}.$$

Dieselben Überlegungen wir oben zeigen, auch $[\psi]$: $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ist ein Morphismus geometrischer Räume. Nach Konstruktion sind $[\phi]$ und $[\psi]$ zueinander inverse Abbildungen, d.h. sie sind zueinander inverse Automorphismen.
QED.

Aufgabe 2
Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Man definiere eine Varietät $\mathbb{P}(V)$, deren zugrundeliegende Punktmenge die Menge der 1-dimensionalen k-linearen Unterräume von V ist und welche isomorph ist zum $\mathbb{P}^{n-1}$ mit $n := \dim_k V$.

Beweis. Alle Betrachtungen von 1.7.1 lassen sich weitgegend in einem koordinatenfreien Kontext wiederholen. Anstelle der eindimensionalen linearen Unterräume von V kann man wieder die Operation

$$k^* \times V - \{0\} \longrightarrow V - \{0\}, (c, v) \mapsto c\cdot v,$$

der Multiplikativen Gruppe k* des Körpers k auf V - {0} betrachten und $\mathbb{P}(V)$ als die Menge der Orbits definieren oder als Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{es gibt ein } c\in k^* \text{ mit } y = c\cdot x.$$

auf den Vektoren von V - {0}. Für $v \in V$ bezeichnet man wieder mit

$$[v]$$

die Äquivalenzklasse von v. Dann ist

$$\mathbb{P}(V) := \{[v] \mid v \in V-\{0\}\}$$

1 .<u>Schritt</u>. <u>Eine Überdeckung von</u> $\mathbb{P}(V)$.
Als nächstes haben wir analog zu Bemerkung 1.7.1(i) eine Überdeckung von $\mathbb{P}(V)$ zu konstruieren, durch Mengen, die man mit der Struktur des $\mathbb{A}^n$ versehen kann. Für jede von Null verschiedene Linearform auf V, sagen wir

$$\ell \in V^* - \{0\}, V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k),$$

setzen wir

$$U_\ell := \{[x] \in \mathbb{P}(V) \mid \ell(x) \neq 0\}.$$

Weil es zu jedem $x \in V - \{0\}$ eine Linearform $\ell \in V^* - \{0\}$ gibt mit $\ell(x) \neq 0$, folgt

$$\mathbb{P}(V) = \bigcup_{\ell\in V^*-\{0\}} U_\ell .$$

Auf der rechten Seite stehen unendlich viele U_ℓ. Man kann aber auch zum Beispiel eine Basis des dualen Vektorraums V* wählen, sagen wir

$$\ell_0,\dots,\ell_{n-1} \in V^* \text{ linear unabhäng}$$

(zum Beispiel die Koordinatenfunktion zu einer fest gewählten Basis von V). Dann gilt

$$\mathbb{P}(V) = U_{\ell_0} \cup \dots \cup U_{\ell_{n-1}}$$

2. <u>Schritt</u>. <u>Die Mengen</u> U_ℓ <u>als Kopien des</u> $\mathbb{A}^n$.
Wie in Bemerkung 1.7.1 (ii) kann man die Basis der ℓ_i verwenden, um die U_{ℓ_i} mit dem $\mathbb{A}^{n-1}$ zu identifizieren. Man verwendet die Abbildungen

$$\phi_{\ell_i}: U_{\ell_i} \longrightarrow \mathbb{A}^{n-1}, [x] \mapsto \left(\frac{\ell_0(x)}{\ell_i(x)}, \dots, \frac{\ell_{i-1}(x)}{\ell_i(x)}, \frac{\ell_{i+1}(x)}{\ell_i(x)}, \dots, \frac{\ell_n(x)}{\ell_i(x)}\right)$$

(1)

mit den Inversen

$$\phi_{\ell_i}^{-1}:\mathbb{A}^{n-1}\longrightarrow U_{\ell_i}, (x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots, x_n)\mapsto \left[\begin{array}{l}\text{Lösung des linearen}\\ \text{Gleichungssystems}\\ \ell_j(x) = x_j \text{ für } j=1,\dots,i-1,i+1,\dots,n\\ \ell_i(x)=1\end{array}\right]$$

Man erhält die Situation von Bemerkung 1.7.1(ii), wenn man in V eine Basis fixiert, mit dieser den Vektorraum V mit dem k^n identifiziert und als ℓ_i die duale Basis verwendet.

Eine weniger koordinaten-abhängige Variante des Vorgehens besteht darin, daß man den $\mathbb{P}^n$ als Menge der in V liegenden Geraden durch den Ursprung betrachtet. Jedes

$$\ell \in V^* - \{0\}$$

definiert eine Hyperebene

$$H_\ell := \{x \in V \mid \ell(x) = 1 \}$$

welche nicht durch den Ursprung geht und die man mit dem $\mathbb{A}^n$ identifizieren kann. Der Koordinatenring

$$k[H_\ell] = k[\, \ell'|_{H_\ell} \mid \ell' \in V^* \,]$$

wird dabei als k-Algebra von den Einschränkungen der lineaaren Funktionen $V \longrightarrow k$ auf H_ℓ erzeugt.[66]

---

[66] Weil der Null-Vektor von V nicht in H_ℓ liegt, besitzt H_ℓ keine natürlich definierte k-Vektorraum-Struktur. Um diese festzulegen, kann man einen beliebigen Vektor $v_0 \in V$ wählen mit

$$\ell(v_0) = 1$$

(d.h. einen beliebigen Vektor von H_ℓ) und linear unabhängige Vektoren $v_1,\dots,v_{n-1}$ mit

$$\ell(v_i) = 0 \text{ für } i = 1,\dots, n-1.$$

Die Vektoren $v_0,\dots,v_{n-1}$ bilden dann eine Basis von V. Die Lösungen der Gleichung $\ell(x) = 1$ sind gerade die Vektoren der Gestalt $v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$ mit $x_i \in k$, und die Abbildung

$$\varphi: k^{n-1} \longrightarrow H_\ell,\ (x_1,\dots,x_{n-1}) \mapsto v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$$

ist bijektiv und bietet die Möglichkeit H_ℓ mit dem k^{n-1} zu identifizieren. Sei

$$\ell_0,\dots,\ell_{n-1} \in V^*$$

die zur Basis $v_0,\dots,v_{n-1}$ duale Basis. Dann gilt nach Wahl der v_i

$$\ell_0 = \ell$$

und die Verpflanzung $\varphi^*(\ell_j)$ von $\ell_j \in V^*$ entlang φ hat für $j = 1,\dots,n-1$ die Gestalt

$$\begin{aligned}\varphi^*(\ell_j)(T_1,\dots,T_{n-1}) &= \ell_j\,(\varphi(T_1,\dots,T_{n-1}))\\ &= \ell_j(v_0) + \sum_{i=1}^{n-1} T_i\, \ell_j(v_i)\end{aligned}$$

Zur Identifikation von U_ℓ mit H_ℓ verwendet man die Abbildung

$$\phi_\ell : U_\ell \longrightarrow H_\ell,\ g \mapsto \text{Schnittpunkt der Geraden } g \text{ mit } H_\ell,$$

(2)
mit der Umkehrung

$$\phi_\ell^{-1} : H_\ell \longrightarrow U_\ell,\ p \mapsto \text{Gerade durch } p \text{ und den Ursprung.}$$

Im folgenden wird es sich als nützlich erweisen, wenn wir Koordinaten-Ringe der affinen Varietäten U_ℓ als k-Algebren von Funktion auf U_ℓ (anstelle der Funktion auf H_ℓ) kennen. Deshalb geben wir eine entsprechende Beschreibung an dieser Stelle an.

3. <u>Schritt</u>. Für jedes $\ell \in V^*-\{0\}$ besteht der Koordinatenring

$$k[U_\ell]$$

der affinen Varietäten U_ℓ gerade aus den Funktionen der Gestalt

$$U_\ell \longrightarrow k,\ [x] \mapsto F\left(\frac{\ell'_1(x)}{\ell(x)}, \dots, \frac{\ell'_s(x)}{\ell(x)}\right),$$

mit einem Polynom F mit Koeffizienten aus k und Linearformen $\ell'_i \in V^*$ (und $s = 1,2,3,\dots$).

Wir verwenden die Bezeichnung $k[U_\ell]$ für die Menge der Funktionen der angegebenen Gestalt und zeigen, daß es sich um den Koordinatenring der affinen Varietät U_ℓ handelt.

$$= 0 + \sum_{i=1}^{n-1} T_i\, \delta_{ij}$$
$$= T_j$$

Weil die $\ell_0,\dots,\ell_{n-1}$ eine Basis von V* bilden, ist jede Linearform auf V eine Linearkombination der ℓ_i und jedes Polynom in irgendwelchen Linearformen auf V ist ein Polynom in den ℓ_i. Weil $\ell_0 = \ell$ auf H_ℓ konstant gleich 1 ist, ist die Einschränkung eines solchen Polynoms auf H_ℓ ein Polynom in den

$$\ell_1,\dots,\ell_{n-1}.$$

Wir haben gezeigt,

$$k[H_\ell] = \{p(\ell_1,\dots,\ell_{n-1}) \mid p \in k[T_1,\dots,T_{n-1}]\}.$$

Die Verpflanzung entlang des Isomorphismus φ ist gerade - wie eben gezeigt - die Abildung

$$\begin{aligned}\varphi^*: k[H_\ell] \longrightarrow k[k^{n-1}] = k[T_1,\dots,T_{n-1}],\ p(\ell_1,\dots,\ell_{n-1}) \mapsto \varphi^*(p(\ell_1,\dots,\ell_{n-1}))\\ = p(\varphi^*(\ell_1),\dots, \varphi^*(\ell_{n-1}))\\ = p(T_1,\dots,T_{n-1})\end{aligned}$$

Man beachte, φ* ist ein Homomorphismus von k-Algebren. Es ist gerade die Umkehrung zur Auswertung an der Stelle $(\ell_1,\dots,\ell_{n-1})$,

$$k[T_1,\dots,T_{n-1}] \longrightarrow k[H_\ell],\ p(T_1,\dots,T_{n-1}) \mapsto p(\ell_1,\dots,\ell_{n-1}).$$

Insbesondere ist φ* ein Isomorphismus von k-Algebren. Die Linearformen $\ell_1,\dots,\ell_{n-1}$ spielen in $k[H_\ell]$ die Rolle der Unbestimmten. Auf Grund der Isomorphie der Koordinatenringe hat man auch eine 1-1-Korrespondenz zwischen den abgeschlossenen und damit auch zwischen den offenen Mengen.

Für [x] = [y] gibt es ein $c \in k^*$ mit $y = c \cdot x$, also

$$\frac{\ell'_i(y)}{\ell(y)} = \frac{\ell'_i(c\cdot x)}{\ell(c\cdot x)} = \frac{c\cdot\ell'_i(x)}{c\cdot\ell(x)} = \frac{\ell'_i(x)}{\ell(x)}$$

Der Wert der Quotienten $\frac{\ell'_i(x)}{\ell(x)}$ hängt also nur von der Äquivalenzklasse des Punktes x $\in$ V ab, d.h. die Quotienten sind wohldefinierte Funktionen auf U_ℓ. Dasselbe gilt damit auch für die Polynome $F(\frac{\ell'_1(x)}{\ell(x)}, \dots, \frac{\ell'_s(x)}{\ell(x)})$ in solchen Quotienten. Allgemein definiert eine auf den Geraden durch den Ursprung von V konststante Funktion f eine Funktion eine Funktion auf der Menge der Geraden. Wir wollen diese zugehörige Funktion auf den Geraden mit [f] bezeichnen,

$$[f][x] := f(x).$$

In diesem Sinne ist die durch $F(\frac{\ell'_1}{\ell}, \dots, \frac{\ell'_s}{\ell})$ gegebene Funktion auf U_ℓ gerade die Funktion

$$[F(\frac{\ell'_1}{\ell}, \dots, \frac{\ell'_s}{\ell})]: U_\ell \longrightarrow k.$$

Die Einschränkung der Funktion $F(\frac{\ell'_1}{\ell}, \dots, \frac{\ell'_s}{\ell})$ auf H_ℓ ist (weil ℓ auf H_ℓ konstant gleich 1 ist) ein Polynom

$$\begin{aligned} F(\frac{\ell'_1}{\ell}, \dots, \frac{\ell'_s}{\ell})|_{H_\ell} &= F(\ell'_1, \dots, \ell'_s)|_{H_\ell} \\ &= F(\ell'_1|_{H_\ell}, \dots, \ell'_s|_{H_\ell}) \end{aligned}$$

in den Einschränkungen von Linearformen $\ell'_i \in V^*$, also ein Element von $k[H_\ell]$. Wir erhalten so eine wohldefinierte Abbildung

$$k[U_\ell] \longrightarrow k[H_\ell],\ [f] \mapsto f|_{H_\ell}.$$

Nach Definition von $k[H_\ell]$ ist diese Abbildung surjektiv. Aus der Abbildungsvorschrift liest man ab, daß es sich um einen Homomorphismus von k-Algebren handelt. Umgekehrt ist eine auf den Geraden durch den Ursprung konstante Funktion f vollkommen festgelegt, wenn man ihren Wert in jeweils einem Punkt der betrachteten Geraden kennt. Das ist aber hier der Fall: wenn wir $f|_{H_\ell}$ kennen , so ist der Wert von f im Schnittpunkt der jeweiligen Gerade mit H_ℓ festgelegt (für alle Geraden von U_ℓ). Die Abbildung ist also auch injektiv, und damit ein Isomorphismus.

4. <u>Schritt</u>. <u>Beschreibung der Durchschnitte</u> $U_\ell \cap U_{\ell'}$.

Wie in Bemerkung 1.7.1 (iii) kann man den Durchschnitt von je zwei der Mengen U_ℓ beschreiben, sagen wir

$$U_\ell \cap U_{\ell'} = \{[x] \in \mathbb{P}(V) \mid \ell(x) \neq 0 \text{ und } \ell'(x) \neq 0 \}$$

Das Bild des Durchschnitts bei der Abbildung (2) ist gerade

$$\phi_\ell(U_\ell \cap U_{\ell'}) = \{ x \in H_\ell \mid \ell'(x) \neq 0 \} = D(\ell'|_{H_\ell})$$

Es ist die Menge der Punkte von $H_\ell = \mathbb{A}^{n-1}$, in denen die Einschränkung der linearen Funktion ℓ' von Null verschieden ist. Dies ist eine offene Hauptmenge des affinen Raums.

Das Bild von $U_{\ell_i} \cap U_{\ell_j}$ bei der Abbildung (1) besteht gerade aus den Punkten des $\mathbb{A}^n$, deren j-te Koordinate ungleich Null ist (einer offenen Hauptmenge).

5. Schritt. Die Topologie des $\mathbb{P}(V)$.

Wie in Bemerkung 1.7.1 (iv) haben wir eine Topologie auf dem $\mathbb{P}(V)$ einzuführen. Man geht in derselben Weise vor: man definiert eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}(V)$ als offen, wenn ihr Durchschnitt mit jedem U_{ℓ_i} (oder sogar mit jedem U_ℓ) offen ist, und beweist mit denselben Argumenten wie in 1.7.1, daß auf diese Weise die offenen Mengen einer Topologie von $\mathbb{P}(V)$ definiert sind.

6. Schritt. Die Unterraum-Topologie der U_ℓ als Teilmengen von $\mathbb{P}(V)$

Wie in Bemerkung 1.7.1 (v) haben wir zu zeigen, die Topologie des $\mathbb{P}(V)$ induziert auf den Teilmengen U_ℓ die Zariski-Topologie der affinen Varietät U_ℓ. Für Teilmengen $U \subseteq U_\ell$ ist die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen zu beweisen.

1. U ist offen als Teilmenge der affinen Varietät U_ℓ.
2. U ist offen als Teilmenge des topologischen Raums $\mathbb{P}(V)$.

Die Implikation 2 $\Rightarrow$ 1 ist trivial (auf Grund der Definition der Topologie von $\mathbb{P}(V)$ im vierten Schritt. Zu beweisen ist die umgekehrte Implikation. Weil jede offene Menge der affinen Varietät U_ℓ Vereinigung von offenen Hauptmengen ist, reicht es zu zeigen,

Jede offene Hauptmenge von U_ℓ ist offen in $\mathbb{P}(V)$.

Eine offene Hauptmenge von U_ℓ hat die Gestalt

$$D(f) = \{[x] \in U_\ell \mid f(x) \neq 0 \}$$

mit $f \in k[U_\ell]$, d.h. mit einer Abbildung welche nach dem dritten Schritt die Gestalt

$$f = [F(\frac{\ell'_1}{\ell}, \dots , \frac{\ell'_s}{\ell})]$$

hat mit einem Polynom F, dessen Koeffizienten in k liegen, und Linearformen $\ell'_i \in V^*$. Wir haben zu zeigen,

$D(f) \cap U_{\ell'}$ ist offen in der affinen Varietät $U_{\ell'}$, für jedes $\ell' \in V^*$.

Dazu betrachten wir das homogene Polynom mit Koeffizienten aus k

$$G(T_1,\dots,T_{s+1}) := T_{s+1}^{\deg F}\bullet F(\frac{T_1}{T_{s+1}}, \dots, \frac{T_s}{T_{s+1}}),$$

welches denselben Grad wie F hat. Wir können dann D(f) in der folgenden Gestalt schreiben.

$$D(f) = \{[x] \in \mathbb{P}(V) \mid \ell(x) \neq 0 \text{ und } g(x) \neq 0 \}$$

mit $g(x) := G(\ell'_1(x),\dots,\ell'_s(x), \ell(x))$. Für den Durchschnitt mit $U_{\ell'}$ erhalten wir

$$D(f) \cap U_{\ell'} = \{[x] \in \mathbb{P}(V) \mid \ell(x) \neq 0 \text{ und } \ell'(x) \neq 0 \text{ und } g(x) \neq 0\}$$
$$= \{[x] \in U_{\ell'} \mid \ell(x) \neq 0 \text{ und } g(x) \neq 0\}$$
$$= \{[x] \in U_{\ell'} \mid \frac{\ell(x)}{\ell'(x)} \neq 0 \text{ und } \frac{g(x)}{\ell'(x)^{\deg G}} \neq 0\}$$

Nach dem dritten Schritt sind

$$U_{\ell'} \longrightarrow k,\ [x] \mapsto \frac{\ell(x)}{\ell'(x)}$$

und

$$U_{\ell'} \longrightarrow k,\ [x] \mapsto \frac{g(x)}{\ell'(x)^{\deg G}} = \frac{1}{\ell'(x)^{\deg G}} \bullet G(\ell'_1(x),...,\ell'_s(x), \ell(x))$$

Elemente des Koordinatenrings $k[U_{\ell'}]$, denn

$$\frac{g}{\ell'^{\deg G}} = \frac{1}{\ell'^{\deg G}} \bullet G(\ell'_1,...,\ell'_s, \ell)$$

läßt sich wegen der Homogenität von G als Polynom mit Koeffizienten aus k in den Quotienten ℓ'_1/ℓ' , ... , ℓ'_s/ℓ' schreiben. Diese beiden Funktionen definieren also offene Hauptmengen $D(\frac{\ell}{\ell'})$ und $D(\frac{g}{\ell'^{\deg G}})$ und $U_{\ell'}$. Der uns interessierende Durchschnitt ist gerade der Durchschnitt dieser offenen Hauptmengen,

$$D(f) \cap U_{\ell'} = D(\frac{\ell}{\ell'}) \cap D(\frac{g}{\ell'^{\deg G}})$$

und damit offen in $U_{\ell'}$.

Da dies für jedes $\ell' \in V^* - \{0\}$ gilt, ist D(f) offen in $\mathbb{P}(V)$.

7. <u>Schritt</u>. <u>Äquivalenz der beiden Topologie-Definitionen für</u> $\mathbb{P}(V)$ <u>im vierten Schritt</u>.
Im fünften Schritt haben wir die Topologie des Raums $\mathbb{P}(V)$ auf zwei verschiedene Weisen definiert, nämliche einmal auf invariante Weise mit Hilfe aller U_ℓ , $\ell \in V^*-\{0\}$, und einmal mit Hilfe speziell gewählter U_{ℓ_i} , i = 0, ... , n-1. Wir wollen jetzt zeigen, daß wir in beiden Fällen dieselbe Topologie erhalten. Dazu reicht es zu zeigen, daß für jede Teilmenge $U \subseteq \mathbb{P}(V)$ die folgenden drei Aussagen äquivalent sind.

1. U ist offen in $\mathbb{P}(V)$ (im Sinne der invarianten Definition mit Hilfe aller U_ℓ).
2. $U \cap U_\ell$ ist offene Teilmenge der affinen Varietät U_ℓ für jedes $\ell \in V^*-\{0\}$.
3. $U \cap U_{\ell_i}$ ist offene Teilmenge der affinen Varietät U_{ℓ_i} für i = 0,...,n-1.

Dabei besteht die Äquivalenz 1 $\Leftrightarrow$ trivialerweise (auf Grund der in 1 verwendeten Definition). Die Implikation 2 $\Rightarrow$ 3 ist ebenfalls trivial. Zu beweisen ist die Implikation 3 $\Rightarrow$ 1. Sei also $U \cap U_{\ell_i}$ offene Teilmenge der affinen Varietät U_{ℓ_i} für i = 0,...,n-1. Auf Grund der Äquivalenz der beiden Aussagen 1 und 2 des sechsten Schritts ist dann aber $U \cap U_{\ell_i}$ auch offen im Raum $\mathbb{P}(V)$ für i = 0, ... , n-1. Weil die offenen Mengen von $\mathbb{P}(V)$ nach dem fünften Schritt die offenen Mengen eines topologischen Raums sind, ist dann aber auch

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} U \cap U_{\ell_i} = U \text{ offen im Raum } \mathbb{P}(V).$$

8. Schritt. Vergleich der Regularitätsbegriffe auf den verschiedenen U_ℓ.

Bei der Einführung des $\mathbb{P}^n$ in 1.7.1 haben wir als nächstes die Regularität der Koordinantenwechsel-Abbildungen (Bemerkung 1.7.1 (vi)) bewiesen und haben dann später diese Regulärit benutzt um die Regularitätsbegriffe bezüglich der verschiedenen affinen offenen Teilmengen U_i zu vergleichen (in Bemerkung 1.7.1 (vii)). Wir weichen hier etwas von diesem Vorgehen ab und vergleichen die Regularitätsbegriffe auf zwei verschiednen U_ℓ direkt.[67] Genauer: wir wollen das folgende Analogon zu Bemerkung 1.7.1(vii) beweisen.

Seien $\ell, \ell' \in V^*-\{0\}$ zwei verschiedene Linearform,

$$U \subseteq U_\ell \cap U_{\ell'}$$

eine offene Teilmenge des $\mathbb{P}(V)$, $x \in U$ ein Punkt und

$$f: U \longrightarrow k$$

eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1. f ist als Funktion auf der offenen Teilmenge U der affinen Varietät U_ℓ regulär im Punkt x.
2. f ist als Funktion auf der offenen Teilmenge U der affinen Varietät $U_{\ell'}$ regulär im Punkt x.

Die erste Aussage bedeutet, für die Punkte x aus einer (ganz in U liegenden) offenen Umgebung W gilt

$$v(x) \neq 0 \text{ und } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ mit } u, v \in k[U_\ell]$$

Wegen $u, v \in k[U_\ell]$ gibt es nach dem dritten Schritt homogene Polynome

$$U(T_1,\dots,T_{s+1}) \text{ und } V(T_1,\dots,T_{s+1})$$

mit Koeffizienten aus k und Linearformen $\ell'_1,\dots,\ell'_s \in V^*$ mit

$$u = [\frac{1}{\ell^{\deg U}} \cdot U(\ell'_1,\dots,\ell'_s,\ell)] \text{ und } v = [\frac{1}{\ell^{\deg V}} \cdot V(\ell'_1,\dots,\ell'_s,\ell)]$$

Durch Erweitern der Quotienten mit geeigneten Potenzen von ℓ können wir erreichen, daß U und V denselben Grad bekommen. O.B.d.A. sei also

$$\deg U = \deg V.$$

Dann gilt

$$f([x]) = \frac{U(\ell'_1(x),\dots,\ell'_s(x),\ell(x))}{V(\ell'_1(x),\dots,\ell'_s(x),\ell(x))} \text{ für } [x] \in W$$

wobei der Nenner nach wie vor für $[x] \in W$ von Null verschieden ist.

Wegen $\ell'(x) \neq 0$ für $[x] \in W \subseteq U \subseteq U_\ell \cap U_{\ell'}$ gilt auch

$$f([x]) = \frac{U(\ell'_1(x),\dots,\ell'_s(x),\ell(x))/(\ell'(x))^{\deg U}}{V(\ell'_1(x),\dots,\ell'_s(x),\ell(x))/(\ell'(x))^{\deg V}} \text{ für } [x] \in W$$

also

[67] Daraus ergibt sich dann umgekehrt die Regularität der Koordinatenwelchsel-Abbildungen.

$$v'(x) \neq 0 \text{ und } f(x) = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

mit

$$u' = [\frac{1}{\ell'^{\deg U}} \cdot U(\ell'_1,..., \ell'_s, \ell)] \text{ und } v' = [\frac{1}{\ell'^{\deg V}} \cdot V(\ell'_1,..., \ell'_s, \ell)]$$

also $u', v' \in k[U_{\ell'}]$.

Wir haben gezeigt, die Aussage 2 folgt aus Aussage 1. Aus Symmetriegründen folgt dann aber auch die erste aus der zweiten Aussage.

Die weitere Argumentation ist fast identisch mit der im Fall des $\mathbb{P}^n$ in 1.7.1.

9. Schritt. Definition der Regularität von Funktionen auf offenen Menge des $\mathbb{P}(V)$. (vgl. Bemerkung 1.7.1 (viii)).

Seien $U \subseteq \mathbb{P}(V)$ eine offene Teilmenge, $x \in U$ ein Punkt und $f:U \longrightarrow k$ eine Funktion. Dann sagen wir, f ist regulär im Punkt x von U, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

1. Es gibt ein $\ell \in V^*-\{0\}$ mit
$$x \in U_\ell \cap U,$$
für welches die Einschränkung $f|_{U_\ell \cap U}: U_\ell \cap U \longrightarrow k$ als Funktion auf der offenen Teilmenge $U_\ell \cap U$ der affinen Variatät U_ℓ regulär ist im Punkt x.
2. Für jedes $\ell \in V^*-\{0\}$ mit
$$x \in U_\ell \cap U$$
ist die Einschränkung $f|_{U_\ell \cap U}: U_\ell \cap U \longrightarrow k$ als Funktion auf der offenen Teilmenge $U_\ell \cap U$ der affinen Variatät U_ℓ regulär im Punkt x.

Die Äquivalenz der beiden Bedingungen ergibt sich aus der Äquivalenz der beiden Bedingungen des achten Schritts und der Tatsache, daß eine Funktion $f:U \longrightarrow k$ auf einer offenen Teilmenge U einer affinen Varietät im Punkt $x \in U$ genau dann regulär ist, wenn die Einschränkung von f auf irgendeine offene Umgebung von x es ist.

Die Funktion $f: U \longrightarrow k$ heißt regulär, wenn sie in jedem Punkt von x regulär ist. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(U)$$

die Menge der regulären Funktionen $U \longrightarrow k$.

10. Schritt. Die Strukturgarbe des $\mathbb{P}(V)$.

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(U)$ ist bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Funktionen $U \longrightarrow k$ eine k-Algebra. Die Abbildung

$$U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(U)$$

ist bezüglich der gewöhnlichen Einschränk von Abbildungen eine Garbe auf $\mathbb{P}^n$.

Weil Summe und Produkt zweier regulärer Funktionen U $\longrightarrow$ k auf einer offenen Teilmenge U einer affinen Varietät regulär sind, gilt dieselbe Aussage auch für den Fall einer regulären Funktion auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{P}(V)$ (wegen der Äquivalenz der Bedingungen des neunten Schritts). Deshalb hat $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(U)$ die Struktur einer k-Algebra. Für offene Teilmengen U, V des $\mathbb{P}^n$ mit $U \subseteq V$ ist die Einschränkung einer regulären Funktion U $\longrightarrow$ k auf V eine reguläre Funktion auf U (ebenfalls wegen des neunten Schritts). Deshalb definiert die Einschränkung auf U einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(U),$$

so daß $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ die Struktur einer Garbe hat.

11. <u>Schritt</u>. $\mathbb{P}(V)$ ist eine Prävarietät.
Nach dem ersten Schritt gilt

$$\mathbb{P}^n = \cup_{\ell \in V^*-\{0\}} U_\ell$$

und nach dem dritten Schritt hat jedes U_ℓ die Struktur einer affinen Varietät über k. Die Topologie von U_ℓ als affine Varietät ist gerade die Unterraum-Topologie der Teilmenge U_ℓ von $\mathbb{P}(V)$ (nach dem sechsten SChritt). Eine Funktion f: U $\longrightarrow$ k auf einer Teilmenge von U_ℓ ist genau dann regulär (als Funktion auf einer offenen Teilmenge U von U_ℓ), wenn sie es als Funktion auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{P}(V)$ ist (nach dem neunten Schritt). Deshalb ist für jedes $\ell \in V^*-\{0\}$ die Einschränkung

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}|_{U_\ell}$$

gerade die Strukturgarbe der affinen Varietät U_ℓ. Deshalb ist U_ℓ für jedes ℓ eine affine offene Teilmenge von $\mathbb{P}(V)$ und $\mathbb{P}(V)$ besitzt eine Überdeckung durch affine offene Teilmengen (nach dem ersten Schritt). Mit anderen Worten, $\mathbb{P}(V)$ ist eine Prävarietät.

12. <u>Schritt</u>. $\mathbb{P}(V)$ ist eine Varietät und isomorph zum $\mathbb{P}^{n-1}$.
Es reicht zu zeigen, daß $\mathbb{P}(V)$ isomorph ist zu $\mathbb{P}^{n-1}$. Dazu reicht es, mit Hilfe einer Basis von V einen Isomorphismus

$$k^{n-1} \xrightarrow{\cong} V$$

zu wählen. Mit Hilfe dieses Isomorphismus übersetzen sich alle Definitionen und Konstruktionen im Kontext des $\mathbb{P}^{n-1}$ in die des $\mathbb{P}(V)$ und umgekehrt. Als Basis

$$\ell_0, \dots, \ell_{n-1}$$

des dualen Raums V* im ersten Schritt sollte die zur gewählten Basis von V duale Basis verwenden. Die i-te Linearform ℓ_i ist dann gerade die Projektion auf die i-te Koordinatenachse (die wir gewöhnlich mit x_i bezeichnen).

QED.

Aufgabe 3

Sei F ein Teilkörper von k. Man definiere eine F-Struktur auf dem $\mathbb{P}^n$, welche auf jedem U_i der Bemerkungen von 1.7.1 die F-Struktur induziert, die von der F-Struktur des $\mathbb{A}^n$ kommt.

Beweis. In Anlehnung der zu Aufgabe 3 von 1.5.5 beschriebenen Konstruktionen kann man die Konstruktion des $\mathbb{P}^n$ einem beliebigen Körper durchführen, wobei an die Stelle der gewöhnlichen Punkte der auftretenden affinen Varietäten die Primideale der entsprechenden Koordinatenringe treten. Man erhält eine Varietät $\mathbb{P}^n_F$ über dem Körper F mit

$$\mathbb{P}^n_F \times \operatorname{Spec} k = \mathbb{P}^n_k$$

Durch Übergang zu den abgeschlossenen Punkten erhält man rechts den in 1.7.1 konstruierten projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ und aus der Produkt-Zerlegung von $\mathbb{P}^n_k$ wird die gesuchte F-Struktur des $\mathbb{P}^n$.
QED.

1.7.3 Nullstellenmengen homogener Polynome im $\mathbb{P}^n$

Sei A ein Ring und bezeichne

$$\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen. Die Elemente des Polynomrings

$$A[T_0, \dots, T_n],$$

haben dann in Multi-Index-Schreibweise die Gestalt

$$f = \sum_{i \in \mathbb{Z}^{n+1}_{\geq 0}} a_i T^i \text{ mit } c_i \in A \text{ für jedes } i,$$

wobei nur endlich viele a_i ungleich Null sind und T^i das Potenzprodukt

$$T_0^{i_0} \bullet \dots \bullet T_n^{i_n}$$

bezeichnet, wenn $i = (i_0,\dots,i_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}_{\geq 0}$ ist. Ein Polynom der Gestalt $a \bullet T^i$ heißt auch Monom vom Grad

$$\deg a \bullet T^i := |i| := i_0 + \dots + i_n .$$

Das Polynom f heißt homogen vom Grad d, wenn nur Monome von Grad d in der Summe wirklich vorkommen, d.h. wenn

$$a_i = 0 \text{ für jedes } i \text{ mit } d \neq |i].$$

gilt.
Ein Ideal

$$I \subseteq A[T_0, \dots, T_n]$$

heißt homogen, wenn es von homogenen Polynomen erzeugt wird.
Bemerkungen

(i) Ein Polynom $f \in A[T_0, \dots, T_n]$ ist genau dann homogen vom Grad d, wenn

$$f(X \bullet T_0, \dots, X \bullet T_n) = X^d \bullet f(T_0, \dots, T_n) \qquad (1)$$

gilt für eine Unbestimmte X, d.h. die Identität soll im Polynomring

$$A[T_0, \dots, T_n, X]$$

bestehen.
Jedes Polynom $f \in A[T_0, \dots, T_n]$ läßt sich auf genau eine Weise als Summe

$$f = f_1 + ... + f_r$$

von homogenen Polynomen aus $A[T_0, ... , T_n]$ mit paarweise verschiedenen Graden schreiben. Die f_i heißen <u>homogene Komponenten</u> von f.

(ii) Für jedes homogene Polynom $f \in A[T_0, ... , T_n]$ von Grad d gilt

$$f(a\bullet x) = a\bullet f(x)$$

für jedes $a \in A$ und jedes n-Tupel $x \in A^n$.
Ist A ein Integritätsbereich mit unendlich vielen Elementen, so gilt auch die Umkehrung. Insbesondere gilt für A = k

$$f \text{ homogen vom Grad } d \Leftrightarrow f(c\bullet x) = c^d\bullet f(x) \text{ für beliebige } c\in k \text{ und } x\in k^n.$$

(iii) Ein Ideal $I \subseteq A[T_0, ... , T_n]$ ist genau dann homogen, wenn für jedes Polynom von $f \in I$ auch alle homogenen Komponenten von f in I liegen.

(iv) Ist $f \in k[T_0, ... , T_n]$ ein homogenes Polynom und $x \in k^{n+1} - \{0\}$ ein Punkt, so gilt

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(c\bullet x) = 0 \text{ für jedes } c \in k^*,$$

d.h. die Frage, ob x eine Nullstelle von f ist, hängt nur von der Äquivalenzklassen $[x] \in \mathbb{P}^n$ ab. Wir schreiben dann auch[68]

$$f([x]) = 0.$$

Für jede Familie $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von homogenen Polynomen von $k[T_0, ... , T_n]$ ist damit

$$\begin{aligned} V^*(f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda) &:= \{ x \in \mathbb{P}^n \mid f_\lambda (x) = 0 \text{ für } \lambda\in\Lambda \} \\ &= \{ [x] \in \mathbb{P}^n \mid f_\lambda (x) = 0 \text{ für } \lambda\in\Lambda \} \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Menge. Entsprechend ist für jedes homogene Ideal I die Menge

$$V^*(I) := \{ [x] \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in I \}$$

korrekt definiert.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Für jede Unbestimmte X gilt

$$\begin{aligned} f(X\bullet T_0, ... , X\bullet T_n) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}^{n+1}_{\geq 0}} a_i\bullet(X\bullet T_0)^{i_0}\bullet...\bullet(X\bullet T_n)^{i_n} \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}^{n+1}_{\geq 0}} a_i\bullet X^{|i|}\bullet T^i. \end{aligned}$$

Wenn nur Summanden mit $|i| = d$ von Null verschieden sind, kann man $X^{|i|} = X^d$ ausklammern und erhält

$$f(X\bullet T_0, ... , X\bullet T_n) = X^d\bullet f(T_0, ... , T_n),$$

d.h. für homogene Polynome gilt (1).

Gelte umgekehrt (1) für ein $f \in A[T_0, ... , T_n]$. Wir fassen die Monome gleichen Grades von f zu homogenen Polynomen zusammen und erhalten eine Darstellung

---

[68] Der Wert f([x]) an der Stelle [x] ist zwar nicht definiert, die Aussagen $f([x]) = 0$ und $f([x]) \neq 0$ sind aber trotzdem korrekt.

$$f = f_1 + \ldots + f_r$$

von f als Summe von homogenen Polynomen f_i deren Grade

$$d_i := \deg f_i$$

paarweis verschieden sind. Dann gilt, wie wir gerade bewiesen haben,

$$\begin{aligned} f(X\bullet T_0, \ldots, X\bullet T_n) &= f_1(X\bullet T_0, \ldots, X\bullet T_n) + \ldots + f_r(X\bullet T_0, \ldots, X\bullet T_n) \\ &= X^{d_1}\bullet f_1(T_0, \ldots, T_n) + \ldots + X^{d_r}\bullet f_r(T_0, \ldots, T_n) \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach Voraussetzung (1). Da zwei Polynome genau dann gleich sind, wenn für jedes Potenzprodukt die Koeffizienten beider Polynome gleich sind, folgt

$$r = 1,\ d_1 = d$$

und

$$X^d\bullet f(T_0, \ldots, T_n) = X^{d_1}\bullet f_1(T_0, \ldots, T_n).$$

also

$$f(T_0, \ldots, T_n) = f_1(T_0, \ldots, T_n).$$

Insbesondere ist f homogen.
Die Existenz der Darstellung von f als Summe homogener Komponenten ergibt sich, wie bereits erwähn durch das Zusammenfassen von Monomen gleichen Grades. Die Darstellung ist eindeutig, weil zwei Polynome (als Elemente eines Polynomrings) genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Koeffizienten haben.

Zu (ii). Sei φ der A-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi\colon A[T_0, \ldots, T_n, X] \longrightarrow A,\ p(T_0, \ldots, T_n, X) \mapsto p(x, a).$$

Wir wenden φ auf die Identität (1) von Bemerkung (i) an und erhalten so den ersten Teil der Aussage von (ii).
Der zweite Teil der Aussage folgt aus der Tatsache, daß ein Polynom mit Koeffizienten aus einem unendlichen Integritätsbereich genau dann an allen Stellen 0 ist, wenn alle sein Koeffizienten 0 sind.
Der dritte Teil der Aussage gilt, weil algebraisch abgeschlossene Körper unendlich viele Elemente besitzen.

Zu (iii). Sei I homogen und $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ein Erzeugendensystem von I, welches aus homogenen Polynomen besteht. Sei

$$d_\lambda := \deg f_\lambda.$$

Sei $f \in I$. Wir haben zu zeigen, daß die homogenen Komponenten von f ebenfalls in I liegen. Wegen $f \in I$ hat f die Gestalt

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda\bullet f_\lambda \text{ mi } p_\lambda \in k[T_0, \ldots, T_n].$$

Wir zerlegen jedes p_λ in homogene Komponenten und schreiben

$$p_\lambda = \sum_i p_{\lambda,i}$$

wobei $p_{\lambda,i}$ die homogene Kompoente von p des Grades $i - d_\lambda$ bezeichne (oder die 0). Dann ist $p_{\lambda,i}\bullet f_\lambda$ homogen von Grad i (oder gleich 0) und dasselbe gilt für

$$f_i := \sum_{\lambda\in\Lambda} p_{\lambda,i}\cdot f_\lambda.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f &= \sum_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda\cdot f_\lambda \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_i p_{\lambda,i}\cdot f_\lambda \\ &= \sum_i \sum_{\lambda\in\Lambda} p_{\lambda,i}\cdot f_\lambda \\ &= \sum_i f_i \end{aligned}$$

Damit haben wir f als Summe von Polynomen f_i dargestellt, wobei f_i den Grad i hat oder gleich 0 ist. Die von 0 verschiedenen f_i sind also gerade die homogenen Komponenten von f. Wegen $f_i := \sum_{\lambda\in\Lambda} p_{\lambda,i}\cdot f_\lambda$ liegen sie in I.

Sei jetzt umgekehrt I ein Ideal mit der Eigenschaft, daß mit $f \in I$ auch alle homogenen Komponenten von f in I liegen. Wir haben zu zeigen, I besitzt ein Erzeugendensystem aus homogenen Polynomen. Sei

$$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

irgendein Erzeugendensystem von I. Wir zerlegen die f_λ in ihre homogenen Komponenten, sagen wir

$$f_\lambda = f_{\lambda,1} + ... + f_{\lambda,n_\lambda}.$$

Nach Voraussetzung liegen alle $f_{\lambda,i}$ in I. Das von ihnen erzeugte Ideal ist deshalb in I enthalten,

$$J := \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i=1}^{n_\lambda} A[T_0, ... , T_n]\cdot f_{\lambda,i} \subseteq I.$$

Nach Konstruktion liegen die $f_\lambda = f_{\lambda,1} + ... + f_{\lambda,n_\lambda}$ Weil die f_λ das Ideal I erzeugen, folgt

$$J = I.$$

Wir haben gezeigt, das Ideal I wird von den homogenen Polynomen $f_{\lambda,i}$ erzeugt.

Zu (iv). Ist I ein homogenes Ideal von $k[T_0, ... , T_n]$, so müssen die Elemente von I trotzdem nicht alle homogen sein: die Linearkombinationen homogener Polynome mit inhomogenen Koeffizienten sind im allgemeinen nicht homogen. Trotzdem ist die Menge

$$V^*(I) := \{ [x] \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } f \in I \}$$

korrekt definiert: sind in einem Punkt $x \in k^{n+1}-\{0\}$ alle $f \in I$ gleich Null, so sind auch die homogenen Erzeuger von I in diesem Punkt gleich 0. Letztere sind dann aber auch

in $c \cdot x$ mit $c \in k^*$ gleich 0 und damit alle Linearkombinationen dieser Erzeuger, also alle $f \in I$.
QED.

1.7.4 Die abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{P}^n$

Die abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{P}^n$ sind gerade die Mengen der Gestalt
$$V^*(I)$$
mit einem homogenen Ideal $I \subseteq k[T_0, \dots, T_n]$, oder auch gerade die Mengen der Gestalt
$$V^*(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$$
mit einer Familie $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ von homogenen Elementen von $k[T_0, \dots, T_n]$.

Beweis. Die Familie der Mengen der Gestalt $V^*(I)$ und die der Gestalt $V^*(f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$ simmen überein, denn es gilt
$$V^*(I) = V^*(f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda),$$
wenn I das von den f_λ erzeugte Ideal ist. Umgekehrt kann man für jedes homogene Ideal I eine passende Familie von homogenen f_λ finden: man nehme homogene Erzeuger von I.

Zeigen wir, die angegebenen Mengen sind gerade die abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{P}^n$.

1. <u>Schritt</u>. die Mengen $V^*(I) = V^*(f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$ sind abgeschlossen in $\mathbb{P}^n$.

Wir haben zu zeigen, die Durchschnitte mit den Mengen $U_i := \{x \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$ sind abgeschlossen in der affinen Varietät U_i für $i = 0, \dots, n$. Wenn wir U_i mit dem $\mathbb{A}^n$ identifizieren, so besteht
$$V^*(f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda) \cap U_i$$
gerade aus den Punkten $(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ mit
$$f_\lambda(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots, x_n) = 0 \text{ für jedes } \lambda\in\Lambda.$$
Mit anderen Worten,
$$V^*(f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda) \cap U_i = V(f_\lambda(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots, x_n) \mid \lambda\in\Lambda).$$
Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{A}^n$.

2. <u>Schritt</u>. Jede offene Hauptmenge von U_i ($i= 0,\dots,n$) hat die Gestalt
$$\mathbb{P}^n - V^*(f)$$
mit einem Homogenen Polynom $f \in k[T_0, \dots, T_n]$.

Wie in Bemerkung 1.7.1 (ii) identifizieren wir U_i mit dem $\mathbb{A}^n$ vermittels der Abbildung
$$\phi_i: U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n,\ [x_0,\dots,x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$
Eine offene Hauptmenge des $\mathbb{A}^n$ wird dadurch zu einer Teilmenge von U_i der Gestalt

$$\{[x_0,...,x_n] \in U_i \mid f(\frac{x_0}{x_i}, ... , \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, ..., \frac{x_n}{x_i}) \neq 0 \} \qquad (1)$$

wobei f ein Polynom mit Koeffizienten aus k ist. Das Produkt

$$F(T_0, ... , T_n) := (T_i)^r \bullet f(\frac{T_0}{T_i}, ..., \frac{T_{i-1}}{T_i}, \frac{T_{i+1}}{T_i}, ... , \frac{T_n}{T_i}) \text{ mit } r = \deg(f)+1$$

ist ein homogenes Polynom und ein Vielfaches von T_i. Deshalb ist

$$\{[x] \in \mathbb{P}^n \mid F(x) \neq 0\} = \mathbb{P}^n - V^*(F)$$

eine wohldefinierte Menge, welche ganz in U_i liegt (wegen $T_i|F$). Nach Konstruktion stimmt sie mit der vorgegebenen offenen Hauptmenge (1) überein.

3. <u>Schritt</u>. Jede abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{P}^n$ hat die Gestalt $V^*(f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda)$.

Es reicht zu zeigen, jede offene Teilmenge des $\mathbb{P}^n$ hat die Gestalt

$$\mathbb{P}^n - V^*(f_\lambda \mid \lambda\in\Lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{P}^n - V^*(f_\lambda) \qquad (2)$$

Nach Definition ist jedes offene Menge U von $\mathbb{P}^n$ Vereinigung der Mengen

$$U\cap U_i$$

wobei $U\cap U_i$ offen in der affinen Varietät U_i ist. Für jedes i ist $U\cap U_i$ Vereinigung von offenen Hauptmengen von U_i. Damit hat jede offene Menge U des $\mathbb{P}^n$ die Gestalt

$$U = \bigcup_{j\in J} D_j$$

wobei für jedes $j\in J$ die Menge D_j eine offene Hauptmenge in einer der affinen Varietäten U_i ist. Wegen (2) reicht es zu zeigen, jedes D_j hat die Gestalt $\mathbb{P}^n - V^*(F)$ mit einem homogenen Polynom F. Das ist aber nach dem zweiten Schritt der Fall.
QED.

1.7.5 Aufgaben

Aufgabe 1

Sei $f \in S := k[T_0, ... , T_n]$ ein von 0 verschiedenes homogenes Polynom. Bezeichne

$$S_f^* := \{\frac{g}{f^h} \in k(T_0, ... , T_n) \mid g \in S \text{ homogen mit } \deg g = n\bullet\deg f \}$$

die k-Algebra der <u>rationalen Funktionen aus</u> S_f<u>, welche homogen vom Grad</u> 0 sind. Man zeige,

$$D^*(f) := \mathbb{P}^n - V^*(f)$$

ist eine affine offene Teilmenge des $\mathbb{P}^n$ mit dem affinen Koordinatenring

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D^*(f)) \cong S_f^*.$$

Beweis. Die Menge D*(f) ist offen, weil V*(f) abgeschlossen ist. Seien

$$d := \deg(f)$$

der Grad des homogenen Polynoms f,

$$E := \{(i_0,...,i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1} \mid i_0+...+ i_n = d \}$$

die Menge der (n+1)-Tupel i nicht-negativer ganzer Zahlen, deren Koordinaten-Summe

$$|i| := i_0+...+ i_n$$

gleich d ist. Es sind gerade die Exponenten i der Potenzprodukte T^i in den $T = T_0, \ldots$, T_n vom Grad d. Weiter sei

$$\{X_i\}_{i\in E}$$

eine Familie von Unbestimmten und

$$N = \#E - 1$$

die Anzahl dieser Unbestimmten minus 1-

1. Schritt. Die Abbildung

$$\phi:\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N, [x] \mapsto [(x^i)_{i\in E}]$$

ist eine wohldefinierte reguläre Abbildung, deren Bild in der abgeschlossenen Menge

$$V^*(I)$$

liegt. Dabei sei I das Ideal des Polynomrings $k[X_i \mid i \in E]$, welches von den homogenen Polynomen der Gestalt

$$X_i \cdot X_j - X_u \cdot X_v \text{ mit } i,j,u,v \in E \text{ und } i+j = u+v \qquad (1)$$

erzeugt wird. Die Abbildung heißt auch Veronese-Einbettung (vgl. Griffiths & Harris [1], Kapitel 1, Abschnitt 4, Geradenbündel und Abbildungen in den projektiven Raum, S. 178).

Die Abbildung ϕ ist wohldefiniert.

Für $x \in k^{n+1}$ ist $(x^i)_{i\in E}$ ein (N+1)-Tupel von Potenzprodukten d-ten Grades in den Koordinaten von x. Ist die i-te Koordinate x_i von x ungleich Null, so gilt dies auch für die d-te Potenz $x^{(0,\ldots,0,d,0,\ldots,0)} = (x_i)^d$ dieser Koordinate. Es besteht also die Implikation

$$x \in k^{n+1} - \{0\} \mapsto (x^i)_{i\in E} \in k^{N+1} - \{0\}$$

Multipliziert man alle Koordinaten von x mit $c\in k^*$, so multiplizieren sich alle Koordinaten von $(x^i)_{i\in E}$ mit c^d. Die Äquivalenzklasse $[(x^i)_{i\in E}]$ hängt also nur von der Äquivalenzklasse [x] ab, d.h. die Abbildung ist ϕ ist wohldefiniert.

Das Bild von ϕ liegt in $V^*(I)$.

Nach Definition von ϕ hat die i-te projektive Koordinate des Bildes $\phi([x])$ den Wert

$$X_i (\phi(x)) = x^i \text{ für jedes } i \in E.$$

Deshalb gilt für $[x] \in \mathbb{P}^n$ und $i,j,u,v \in E$ mit $i+j = u+v$:

$$(X_i \cdot X_j - X_u \cdot X_v)(\phi([x])) = x^i \cdot x^j - x^u x^v = x^{i+j} - x^{u+v} = 0.$$

Das Bild von ϕ liegt also tatsächlich in der Nullstellenmenge des von den Polynomen (1) erzeugten Ideals.

Die Abbildung ϕ ist ein Morphismus von geometrischen Räumen.

Auf der Menge

$$U_i = \{[x] \in \mathbb{P}^n \mid T_i(x) \neq 0 \}$$

der Punkte mit einer von Null verschiedenen i-ten projektiven Koordinate können wir die Abbildungsvorschrift für ϕ in der folgenden Gestalt schreiben. Für $[x] \in U_i$ gilt - wenn x_i die i-te Koordinate von x bezeichnet -

$$\begin{aligned}\phi([x]) &= [(x^i)_{i\in E}] && \text{(nach Definition von } \phi) \\ &= [(x^i/(x_i)^d)_{i\in E}] && \text{(wegen } x_i \neq 0)\end{aligned}$$

Nun ist $x^i/(x_i)^d$ der Wert an der Stelle x der Funktion

$$\frac{T^i}{(T_i)^d} = \left(\frac{T}{T_i}\right)^i \in k[\frac{T_0}{T_i},\dots,\frac{T_{i-1}}{T_i},\frac{T_{i+1}}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}] =: k[\frac{T}{T_i}].$$

Die Koordinatenfunktionen der Abbildung ϕ auf der affinen offenen Menge U_i liegen demnach in $k[\frac{T}{T_i}]$ und sind damit regulär. Dann ist aber die Abbildung $\varphi|_{U_i}$ ein Morphismus. Da dies für jedes i gilt, ist φ ein Mophismus.

2. Schritt. Mit den Bezeichnungen des ersten Schritts gilt

1. $\mathrm{Im}(\phi) = V^*(I)$.
2. ϕ ist als Abbildung $\mathbb{P}^n \longrightarrow V^*(I)$ bijektiv.
3. $\phi^{-1}: V^*(I) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ ist ein Morphismus geometrischer Räume.

Sei $[y] \in V^*(I)$, d.h. $y = (y_i \mid i \in E)$ und

$$y_i \cdot y_j = y_u \cdot y_v \text{ für beliebige } i,j,u,v \in E \text{ mit } i+j = u+v.$$

<u>Es gibt ein</u> $i \in E$ <u>mit nur einer von</u> 0 <u>verschiednen Koordinate und</u> $y_i \neq 0$.

Nach Definition von E ist die einzige von 0 verschiedne Koordinate dieses $i \in E$ gleich d. Nach Definition des projektiven Raums gibt es ein $i \in E$ mit $y_i \neq 0$. Wir schreiben

$$i = (i_0,\dots,i_n).$$

Falls eine Koordinate von i gleich d ist, so ist dieses i bereits das gesuchte.
Falls nicht, so reicht es zu zeigen, daß wir eines der i_ν mit $i_\nu > 0$ solange vergrößern können bis es gleich d ist. Wir werden zeigen, daß sich jedes solche i_ν so vergrößern läßt:

Für jedes $\nu \in \{0,\dots,n\}$ mit

$$0 < i_\nu < d$$

gibt es ein $i' \in E$ mit $y_{i'} \neq 0$ und $i'_\nu = i_\nu + 1$.

Wegen $i_\nu < d$ gibt es eine Koordinate, sagen wir die μ-te, mit $i_\mu > 0$. Wegen $0 < i_\nu$ kann i_μ nicht gleich d sein. Es gilt dann also

$$0 < i_\mu < d.$$

Wir setzen

$$i' := (i'_0,\dots,i'_n) \text{ und } i'_\alpha := \begin{cases} i_\nu+1 & \text{falls } \alpha=\nu \\ i_\mu-1 & \text{falls } \alpha=\mu \\ i_\alpha & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$i + i = i' + (2i-i') \text{ und } i', 2i-i' \in E,$$

also

$$y_i \bullet y_i = y_{i'} \bullet y_{2i-i'} \,.$$

Weil die linke Seite ungleich 0 ist, ist es auch die rechte. Insbesondere ist $y_{i'}$ von Null verschieden.

Die Koordinaten eines Punktes $y = (y_i \mid i \in E)$ mit $[y] \in V^*(I)$ sind bereits durch $n+1$ dieser Koordinaten festgelegt. Genauer: für $i = (i_0,\dots,i_n) \in E$ gilt

$$y_i = y_a \bullet \prod_{\nu\neq\nu_0} \left(\frac{y_{b_\nu}}{y_a}\right)^{i_\nu} = (y_a)^{i_{\nu_0}-d+1} \bullet \prod_{\nu\neq\nu_0} (y_{b_\nu})^{i_\nu} \qquad (2)$$

wenn $y_a \neq 0$ ist und $a \in E$ die ν_0-te Koordinate d hat. Dabei habe $b_\nu \in E$ die ν_0-te Koordinate $d-1$ und die ν-te Koordinate 1. Die Koordinaten y_i von y sind somit durch

$$y_{b_0},\dots,y_{b_{\nu_0-1}}, y_a, y_{b_{\nu_0+1}}, \dots, y_{b_n}$$

eindeutig festgelegt. Es ist

$$\phi([y_{b_0},\dots,y_{b_{\nu_0-1}}, y_a, y_{b_{\nu_0+1}}, \dots, y_{b_n}]) \qquad (3)$$

wohldefiniert und gleich $[y]$, d.h. jeder Punkt $[y] \in V^*(I)$ liegt im Bild von ϕ.

Wir schreiben unter Verwendung der Standard-Einheitsvektoren

$$a = d \bullet e_{\nu_0} \in E$$

und

$$b_\nu = (d-1) \bullet e_{\nu_0} + e_\nu \,,\ \nu \neq \nu_0.$$

Betrachten ein der definierenden Gleichungen der Menge $V^*(I)$:

$$y_{i'} \bullet y_a = y_i \bullet y_{b_\nu} \quad \text{mit } i'+a = i + b_\nu$$

Weil sich a und b_ν nur in zwei Koordinaten unterscheiden - der ν_0-ten und der ν-ten - gilt dasselbe für i' und i. Die ν_0-te Koordinate von a ist um 1 größer als die von b_ν. Deshalb muß die ν_0-te Koordinate von i' zum Ausgleich um 1 kleiner sein als die von i:

$$i'_{\nu_0} = i_{\nu_0} - 1.$$

Die ν-te Koordinate von a ist um 1 kleiner als die von b_ν . Deshalb muß die ν-te Koordinate von i' zum Ausgleich um 1 größer sein:

$$i'_\nu = i_\nu + 1.$$

Wegen $y_a \neq 0$ können wir durch y_a und die obige Identität in der Gestalt

$$y_{i'} = \frac{y_{b_\nu}}{y_a} \bullet y_i$$

schreiben. Die obigen Relationen zwischen den Koordinaten i' und i in dieser Identität besagen gerad, daß bei der Multiplikation von y_i mit dem Quotienten

$$\frac{y_{b_\nu}}{y_a}$$

ein $y_{i'}$ ensteht, dessen Index i' eine um 1 vergrößerte ν-te Koordinaten und eine um 1 verkleinerte ν_0-te Koordinate besitzt.

Zu vorgegebenen $i = (i_0,...,i_n) \in E$ können wir ausgehend von y_a durch Multiplikation mit der i_ν-Potenz von $\frac{y_{b_\nu}}{y_a}$ ein $y_{i'}$ gewinnen, dessen Index i' die ν-te Koordinate i_ν bekommt. Indem wir nacheinander mit i_ν-ten Potenz von $\frac{y_{b_\nu}}{y_a}$ für die verschiedenen ν Multiplizieren, erhalten wir in $y_{i'}$ dessen Index i' in allen Koordinaten mit dem vorgegebenen i übereinstimmt - mit eventuell Ausnahme der ν_0-ten Koordinate. Da die Summe der Koordinaten für alle Elemente von E gleich d ist stimmen dann aber auch die ν_0-Koordinaten überein, d.h. wir erhalten y_i als das Produkt

$$y_i = y_a \bullet \prod_{\nu \neq \nu_0} \left(\frac{y_{b_\nu}}{y_a}\right)^{i_\nu}$$

Wegen $y_a \neq 0$ ist $\phi([(y_{b_0},...,y_{b_{\nu_0-1}}, y_a, y_{b_{\nu_0+1}}, \ldots ,y_{b_n})])$ ein wohldefinierter Punkt von V*(I). Mit $b_{\nu_0} := a$ erhalten wir

$$\phi([y_{b_1},...,y_{b_{\nu_0-1}}, y_a, y_{b_{\nu_0+1}}, \ldots ,y_n]) = \left[\left(\prod_{\nu=0}^{n} (y_{b_\nu})^{i_\nu} \mid (i_0,...,i_n) \in E\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{(y_a)^{d-1}} \bullet \left(\prod_{\nu=0}^{n} (y_{b_\nu})^{i_\nu} \mid (i_0,...,i_n) \in E\right)\right]$$

$$= \left[(y_a)^{i_{\nu_0}-d+1} \cdot \left(\prod_{\nu \neq \nu_0}^{n} (y_{b_\nu})^{i_\nu} \mid (i_0,\dots,i_n) \in E \right) \right]$$

$$= [(y_i \mid i \in E)] \qquad \text{(nach (2))}$$

$$= [y]$$

Damit gilt (3), und die Surjektivität von ϕ ist bewiesen.
Zusätzlich haben wir eine Abbildung

$$\psi_a: V^*(I) \cap D(X_a) \longrightarrow \mathbb{P}^n,\ [y] \mapsto [(y_{b_0},\dots,y_{b_{\nu_0-1}}, y_a, y_{b_{\nu_0+1}}, \dots, y_{b_n})] \qquad (4)$$

konstruiert mit $\phi \circ \psi_a$ = Id für jedes $a \in E$ mit nur einer von 0 verschieldenen Koordinate. Für $[x] \in U_i$ mit $i = \nu_0$ gilt aber auch $\phi([x]) \in D(X_a)$ mit $a = d \bullet e_i$ und

$$\psi_a(\phi([x]) = \psi_a([(x^i \mid i \in E)]) \qquad \text{(Definition von } \phi)$$

$$= [(x^{b_0},\dots,x^{b_{i-1}}, x^a, x^{b_{i+1}},\dots,x^{b_n})] \qquad \text{(Definition von } \psi_a)$$

$$= [(x_i)^{d-1}(x_0,\dots,x_{i-1},x_i, x_{i+1},\dots,x_n)]$$

$$= [x]$$

d.h.

$$\phi|_{U_{\nu_0}}: U_{\nu_0} \longrightarrow V^*(I) \cap D(X_a) \text{ und } \psi_a: V^*(I) \cap D(X_a) \longrightarrow U_{\nu_0}$$

sind zu einander inverse Bijektionen.
Ist $a' \in E$ ein weiteres Tupel mit nur einer von 0 verschiedenen Koordinate,so müssen die Abbildungen ψ_a und $\psi_{a'}$ auf $V^*(I) \cap D(X_a) \cap D(X_{a'})$ übereinstimmen, denn sie sind dort invers zu ein und derselben Abbildung.

Ganz am Anfang dieses Schritts haben wir gezeigt, daß die Mengen

$$D(X_a) \text{ mit } a \in E \text{ und nur eine Koordinate von } a \text{ ist ungleich } 0$$

das Bild $\text{Im}(\phi) = V^*(I)$ überdecken. Deshalb setzen die Abbildungen ψ_a zu einer Abbildung

$$\psi: V^*(I) \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

die invers ist zu ϕ. Insbesondere ist $\phi: \mathbb{P}^n \longrightarrow V^*(I)$ bijektiv. Wir haben noch zu zeigen, daß ψ ein Morphismus ist. Dazu reicht es zu zeigen daß die Abbildunge ψ_a Morphismen sind.
Weil der Definitionsbereich von ψ_a in $D(X_a)$ liegt, können wir die Abbildungsvorschrift (4) von ψ_a auch in der Gestalt

$$\psi_a([y]) = [\frac{y_{b_0}}{y_a},\dots,\frac{y_{b_{\nu_0-1}}}{y_a},1,\frac{y_{b_{\nu_0+1}}}{y_a},\dots,\frac{y_{b_n}}{y_a}] \in U_{\nu_0}$$

schreiben. Identifizieren wir die Menge U_{ν_0} mit dem entsprechenenden affinen Raum, so bekommt die Abbildungsvorschrift die Gestalt

$$\psi_a([y]) = (\frac{y_{b_0}}{y_a},\dots,\frac{y_{b_{\nu_0-1}}}{y_a},\frac{y_{b_{\nu_0+1}}}{y_a},\dots,\frac{y_{b_n}}{y_a}) \in \mathbb{A}^n$$

Die Koordinaten-Funktionen von ψ_a sind also Einschränkungen von Funktionen der Gestalt

$$\frac{X_{b_j}}{X_a} \in k[\frac{X_i}{X_a} \mid i \in E],$$

d.h. Einschränkungen regulärer Funktionen. Sie sind damit selbst regulär und die durch sie definierte Abbildung ψ_a ist ein Morphismus. Dann ist aber auch die Umkehrung ψ von ϕ ein Morphismus.

3. Schritt. $D^*(f)$ ist eine affine offene Teilmenge des $\mathbb{P}^n$.
Wir beginnen mit dem Fall, daß der Grad des homogenen Polynoms f gleich

$$\deg(f) = 1$$

ist. Dann definiert f im k^{n+1} eine Hyperebene, welche den Ursprung enthält. Die Koeffizienten von f bilden einen Vektor $n \in k^{n+1} - \{0\}$, und es gilt

$$f(x) = < n, x >,$$

wenn < , > das Standard-Skalarprodukt des k^{n+1} bezeichnet. Durch eine umkehrbare lineare Transformation

$$A: k^{n+1} \longrightarrow k^{n+1}$$

können wir n in einen Standard-Einheitsvektor überführen[69], sagen wir

$$An = \lambda\bullet e_i \text{ mit } \lambda\in k^*.$$

Nach Aufgabe 1 von 1.7.2 induziert diese Transformation einen Automorphismus des $\mathbb{P}^n$. Das homogene Polynom f bekommt dabei die Gestalt

$$f(x) = < e_i , x >,$$

d.h. f(x) ist die i-te Koordinate von x, d.h. $f(T_0,\dots,T_n) = T_i$. Es reicht zu zeigen, daß

$$D^*(f) = D^*(T_i) = \{ [x] \in \mathbb{P}^n \mid T_i(x) \neq 0 \}$$

eine affine offene Teilmenge des $\mathbb{P}^n$. Das ist aber der Fall, denn die ist gerade die Menge U_i der Bemerkungen von 1.7.1:

$$D^*(f) = U_i.$$

Behandeln wir den allgemeinen Fall,

$$f(T) = \sum_{i\in E} a_i\bullet T^i$$

Nach dem zweiten Schritt ist die Abbildung

$$\phi:\mathbb{P}^n \longrightarrow V^*(I)\ (\subseteq \mathbb{P}^N),\ [x] \mapsto [\ (x^i \mid i \in E\ )\ ]$$

ein Isomorphismus geometrischer Räume. Betrachten wir das homogene Polynom

---

[69] Man ergänze den von Null verschiednen Vektor n zu einer Basis des k^{n+1} und überführe diese Basis in eine, die aus Standard-Einheitsvektoren besteht.

$$L(y) = \sum_{i\in E} a_i \bullet X_i$$

vom Grad 1 (als Funktion auf dem affinen Raum k^{N+1}). Und die zugehörige abgeschlossene Teilmenge

$$V^*(L) \subseteq \mathbb{P}^N.$$

Für einen Punkte $[x] \in \mathbb{P}^n$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\phi([x]) \in V^*(L) &\Leftrightarrow L(\phi([x])) = 0\\
&\Leftrightarrow L(y) = 0 \text{ für } y = (x^i \mid i \in E)\\
&\Leftrightarrow \sum_{i\in E} a_i \bullet x^i = 0\\
&\Leftrightarrow f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow [x] \in V^*(f)
\end{aligned}$$

also

$$\phi(V^*(f)) = V^*(L) \cap \mathrm{Im}(\phi).$$

Weil φ als Abbildung $\mathbb{P}^n \longrightarrow V^*(I)$ bijektiv ist, könne wir zu den Komplementen übergehen und erhalten

$$\phi(\mathbb{P}^n - V^*(f)) = \mathrm{Im}(\phi) - V^*(L) \cap \mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Im}(\phi) \cap (\mathbb{P}^n - V^*(L))$$

also

$$\phi(D^*(f)) = V^*(I) \cap D^*(L).$$

Weil ϕ: $\mathbb{P}^n \longrightarrow V^*(I)$ ein Isomorphismus von geometrischen Räumen ist, ist die Aussagen des dritten Schritts äquivalent zur Aussage, daß $V^*(I) \cap D^*(L)$ eine affine offene Teilmenge der projektiven Varietät $V^*(I)$ ($\subseteq \mathbb{P}^N$) ist. Auf Grund der Behandlung des Spezialfalls deg(f) = 1 wissen wir, daß $D^*(L)$ eine affine offene Teilmenge des $\mathbb{P}^N$ ist, also eine affine Varietät (die isomorph ist zum $\mathbb{A}^N$). Als abgeschlossene Teilmeng von $D^*(L)$ ist aber $V^*(I) \cap D^*(L)$ ebenfalls eine affine Varietät. Insgesamt also eine affine offene Teilmenge von $V^*(I)$.

4. <u>Schritt</u>. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D^*(f)) \cong S^*_f$

Sei g: $D^*(f) \longrightarrow k$ eine reguläre Funktion und $x \in D^*(f)$ ein Punkt. Dann gibt es ein i mit

$$x \in U_i := \{[x] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$$

und in einer offenen Umgebung $W \subseteq U \cap U_i$ von x gibt es Polynome

$$u, v \in k[U_i] = k[\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}]$$

in den Quotienten $\frac{T_0}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}$ mit

$$v(x') \neq 0 \text{ und } g([x']) = \frac{u(x')}{v(x')} \text{ für jedes } [x'] \in W.$$

Indem wir den Quotienten u/v mit einer hinreichend hohen Potenz von T_i erweitern erreichen wir, daß u und v homogene Polynome gleichen Grades in $T_0,...,T_n$ werden (mit Koeffizienten aus k),

$$u, v \in k[T_0,...,T_n] \text{ , u, v homogen vom selben Grad.}$$

Außerdem können wir im Quotienten gemeinsame Teiler kürzen und so erreichen, daß

u und v teilerfremd

sind. Sind u', v' $\in k[T_0,...,T_n]$ zwei weitere homogene und teilerfremde Polynome gleichen Grades und W' eine weitere offene Umgebung eines weiteren Punktes y von D*(f), die in $U \cap U_j$ liegt, mit

$$v'(x') \neq 0 \text{ und } g([x']) = \frac{u'(x')}{v'(x')} \text{ für jedes } [x'] \in W'.$$

so gilt

$$\frac{u(x')}{v(x')} = \frac{u'(x')}{v'(x')} \text{ für jedes } [x'] \in W \cap W'.$$

Weil der $\mathbb{P}^n$ irreduzibel ist, ist der Durchschnitt der beiden nicht-leeren Mengen W und W' nicht leer. Es folgt

$$v'(x') \cdot u(x') = v(x') \cdot u'(x') \tag{1}$$

für jeden Punkt x' aus dem Urbild von $W \cap W'$ bei der natürlichen Abbildung

$$\pi: k^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n, x' \mapsto [x'].$$

Man beachte die Abbildung π ist stetig, denn das Urbild der abgeschlossenen Menge V*(I), I ein homogenes Ideal, ist die abgeschlossene Menge V(I) - {0} von k^{n+1}-{0}. Damit gilt (1) in den Punkten einer nicht-leeren offenen Teilmenge des $\mathbb{A}^{n+1}$. Weil $\mathbb{A}^{n+1}$ eine irreduzible Varietät ist, liegt jede nicht-leere offene Menge dicht im $\mathbb{A}^{n+1}$ und die Identität gilt in allen Punkten des $\mathbb{A}^{n+1}$ (vgl. 1.6.11 (ii)), d.h.es besteht eine Gleichheit der Polynome

$$v' \cdot u = v \cdot u' \text{ in } k[T_0,...,T_n].$$

Weil u und v bzw .u' und v' teilerfremd sind, gilt u | u' und v | v', sagen wir

$$u' = u \cdot \alpha, \; v' = v \cdot \beta,$$

also $u \cdot v \cdot \beta = u \cdot v \cdot \alpha$, also $\alpha = \beta$. Damit $\alpha = \beta$ ist ein gemeinsamer Teiler von u' und v'. Da aber u' und v' teilerfremd sind, ist $\alpha = \beta$ eine Einheit des Polynomrings, d.h. eine von 0 verschiedene Konstante. Insbesonder haben v und v' dieselben Nullstellen. Da x und y beliebig gewählte Punkte von D*(f) sind, muß gelten

$$v(x') \neq 0$$

für jeden Punkt $x' \in \mathbb{A}^{n+1}$-{0} mit $\pi(x') \in$ D*(f), d.h. mit $x' \in$ D(f). Es besteht die Implikation

$$v(x') = 0 \Rightarrow f(x') = 0,$$

d.h. $V(v) \subseteq V(f)$, also $\sqrt{f \cdot k[T_0,...,T_n]} \subseteq \sqrt{v \cdot k[T_0,...,T_n]}$. Es gibt eine natürliche Zahl r mit $f^r \in v \cdot k[T_0,...,T_n]$, sagen wir

$$f^r = v \cdot w.$$

Man beachte, das Homogene Polynom w ist in den Punkten von D*(f) ungleich 0, weil f dort ungleich 0 ist. In $k(T_0,...,T_n)$ gilt

$$\frac{u}{v} = \frac{u\bullet w}{v\bullet w} = \frac{u\bullet w}{f^r}$$

und unsere vorgegeben reguläre Funktion g: D*(f) $\longrightarrow$ k hat die Gestalt

$$g([x']) = \frac{u(x')\bullet w(x')}{f(x')^r} \text{ für jedes } [x'] \in D^*(f).$$

Weil Zähler und Nenner homogen vom selben Grad sind, folgt $g = \frac{u\bullet w}{f^r} \in S_f^*$. Wir haben gezeigt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D^*(f)) \subseteq S_f^*.$$

Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Ein Element von S_f^* hat die Gestalt

$$\frac{g}{f^h} \text{ mit f, g homogen und deg } g = h\bullet\deg f\ (= h\bullet d).$$

Wir haben zu zeigen, dies ist eine auf D*(f) wohldefinierte reguläre Funktion. Sie ist wohldefiniert, weil Zähler und Nenner homogen sind und vom selben Grad. Wir haben noch zu zeigen, die Funktion ist regulär in jedem Punkt [x] $\in$ D*(f). Wir wählen ein i mit $[x] \in U_i$. Dann hat die Funktion in einer Umgebung von [x] die Gestalt

$$\frac{g}{f^h} = \frac{g/x_i^{h\bullet d}}{f^h/x_i^{h\bullet d}}$$

dabei sind $g/x_i^{h\bullet d}$ und $f^h/x_i^{h\bullet d}$ auf U_i reguläre Funktionen, wobei die Nenner-Funktion

$$f^h/x_i^{h\bullet d}$$

in den Punkten von D*(f) ungleich Null ist. Der Quotient ist deshalb regulär auf D*(f). Wir haben gezeigt, $\frac{g}{f^h}$ ist eine auf D*(f) reguläre Funktion. Zusammen ergibt sich

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(D^*(f)) = S_f^*.$$

QED.

Aufgabe 2

Sei $I \subseteq S := k[T_0, \dots , T_n]$ ein homogenes Ideal. Man beweise die folgenden Aussagen.

(i) V*(I) ist genau dann die leere Menge,

$$V^*(I) = \emptyset ,$$

wenn es eine natürliche Zahl N gibt mit $T_i^N \in I$ für i = 1,..., n.

(ii) V*(I) ist genau dann irreduzibel, wenn $\sqrt{I}$ ein Primideal von S ist.

Beweis.Zu(i). Sei I ein homogenes Ideal mit V*(I) = $\emptyset$. Dann muß

$$V(I) = \{0\} \tag{1}$$

gelten (in k^{n+1}), denn der Ursprung liegt in V(I), weil I von homogenen Polynomen erzeugt wird, d.h. von Polynomen mit einer Nullstelle im Ursprung. Umgekehrt kann kein weiterer Punkt in V(I) liegen, denn für jeden Punkt x $\in$ V(I)-{0} wäre [x] ein

Punkt von V*(I). Wegen (1) ist T_i in "jedem" Punkt von V(I) gleich Null. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz liegt eine Potenz von T_i in I. Da die Anzahl der T_i endlich ist, kann man einen gemeinsame Exponenten N für alle i finden, welchen T_i^N in I liegt.

Sei umgekehrt $T_i^N \in I$ für jedes i. Dann gilt

$$\begin{aligned} V^*(I) &= V^*(T_0^N) \cap \dots \cap V^*(T_n^N) \\ &= V^*(T_0) \cap \dots \cap V^*(T_N) \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil jeder Punkt des $\mathbb{P}^n$ mindestens eine projektive Koordinate besitzt, die ungleich 0 ist.

<u>Zu (ii)</u>. 1. <u>Schritt</u>. Ist $\sqrt{I}$ ein Primideal, so ist V*(I) irreduzibel.
Wir betrachten die Abbildung

$$\pi: \mathbb{A}^{n+1} - 0 \longrightarrow \mathbb{P}^n,\ x \mapsto [x]$$

Es gilt

$$\pi^{-1}(V^*(I)) = V(I)-\{0\}$$

Angenommen V*(I) ist reduzibel, sagen wir

$$V^*(I) = V^*(I') \cup V^*(I'')$$

mit echten Teilmengen V*(I') und V*(I'') von V*(I), so ist

$$\pi^{-1}(V^*(I)) = \pi^{-1}(V^*(I')) \cup \pi^{-1}(V^*(I''))$$

also

$$V(I)-\{0\} = (V(I')-\{0\}) \cup (V(I'')-\{0\})$$

also

$$V(I) = V(I') \cup V(I'')$$

(I', I'' und I sind homogene Ideale, d.h. der Ursprung ist gemeinsame Nullstelle).
Weil π surjektiv ist, gilt $\pi(\pi^{-1}(S)) = S$ für jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{P}^n$. Deshalb sind V(I') und V(I'') echte Teilmengen von V(I). Wir haben gezeigt mit V*(I) ist auch V(I) reduzibel. Dann ist aber $\sqrt{I}$ kein Primideal - im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. <u>Schritt</u>. $\sqrt{I}$ ist ein homogenes Ideal.
Sei $f \in \sqrt{I}$ und sei $f = f_1 + \dots + f_r$ die Zerlegung in homogene Polynome mit

$$\deg f_1 < \dots < \deg f_r.$$

Es gibt dann eine natürliche Zahl n mit $f^n \in I$ und $(f_1)^n$ ist die homogene Komponente kleinsten Grades von f^n, d.h. es gilt $(f_1)^n \in I$, also $f_1 \in \sqrt{I}$ und

$$f - f_1 = f_2 + \dots + f_r \in \sqrt{I}.$$

Wir wiederholen diese Argumentation und sehen nacheinander, daß alle homogenen Komponenten von f in $\sqrt{I}$ liegen.

3. <u>Schritt</u>. Ist V*(I) irreduzibel, so ist $\sqrt{I}$ ein Primideal.
Auf Grund des zweiten Schritts können wir I durch $\sqrt{I}$ ersetzen, also annehmen, daß I ein radikales homogenes Ideal ist,

$$I = \sqrt{I}.$$

Angenommen, I ist kein Primideal. Dann gibt es Polynome $f, g \in k[T_0, \dots, T_n]$ mit

$$f\cdot g \in I\ ,\ f \notin I\ ,\ g \notin I. \qquad (2)$$

Ist f inhomogen und f' die homogene Komponente kleinsten Grades von f so können wir - falls f' in I liegt - f durch f-f' ersetzen. Dies können wir solange wiederholen, solange f inhomogen ist und die homogene Komponente kleinsten Grades von f in I liegt. Nach endlich vielen Schritten erreichen wir

f ist homogen oder f' liegt nicht I.

Ist f homogen, so gilt f = f' und in beiden Fällen liegt f' nicht in I. Wir können also annehmen,

$$f' \notin I.$$

Dieselbe Argumentation mit g anstelle von f können wir g so abändern, daß die Komponente g' kleinsten Grades von g nicht in I liegt,

$$g' \notin I.$$

Nun ist f'g' die homogene Komponente kleinsten Grades von f•g, sodaß wegen f•g∈I auch f'•g' in I liegt. Wir haben damit homogene Polynome f', g' gefunden, die ebenfalls den Bedingungen von (2) genügen. Wir können also annehmen,

f und g sind homogene Polynome.

Dann sind

$$I' := I + f\cdot k[T_0, \dots , T_n] \text{ und } I' := I + g\cdot k[T_0, \dots , T_n]$$

homogene Ideale deren Nullstellenmengen echt in V(I) enthalten sind

$$V(I') \subsetneq V(I) \text{ und } V(I'') \subsetneq V(I).$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} V(I') \cup V(I'') &= V(I'\cdot I'') \\ &= V(I\cdot g + f\cdot I + f\cdot g\cdot k[T_0, \dots , T_n]) \\ &\supseteq V(I) \end{aligned}$$

(letzteres wegen $f\cdot g \in I$), also

$$V(I') \cup V(I'') = V(I),$$

also

$$(V(I')-\{0\}) \cup (V(I'')-\{0\}) = V(I) - \{0\}.$$

Weil I, I', I'' homogene Ideale sind, können wir diese Identität mit Hilfe der Surjektion π vom Anfang des ersten Schritts in der Gestalt

$$\pi^{-1}V^*(I') \cup \pi^{-1}V^*(I'') = \pi^{-1}V^*(I).$$

Weil V(I') und V(I'') echt enthalten sind in V(I) sind auch V*(I') und V*(I'') echt enthalten in V*(I). Außerdem erhalten wir aus dieser Identität durch Anwenden von π

$$V^*(I') \cup V^*(I'') = V^*(I).$$

Wir haben gezeigt, V*(I) ist Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen, d.h. V*(I) ist reduzibel. Das steht aber im Widerspruch zur Vorausetzung. Deshalb muß

$$I = \sqrt{I}$$

ein Primideal sein.

QED.

Aufgabe 3

Sie $F \subseteq k$ ein Teilkörper von k. Die F-geschossenen Mengen des $\mathbb{P}^n$ für die F-Struktur von 1.7.2, Aufgabe 3, sind die Mengen der Gestalt V*(I) mit einem homogenen Ideal von $S := k[T_0, \dots , T_n]$, welches von Polynomen mit Koeffizienten aus F erzeugt wird.

Beweis. Die genaue Behandlung dieser Aufgabe wird verschoben. Wir beschränken uns hier auf einen Hinweis. Die Konstruktion des projektiven Raums $\mathbb{P}^n$ in 1.7.1 kann man auch über dem Körper F durchführen. Wie bei der Behandlung von F-Strukturen im Fall von affinen Varietäten muß man dabei die Punkte, die im algebraisch abgeschlossenen Fall Tupel mit Koordinaten aus k sind, durch Primideale ersetzen. Als Menge definiert man deshalb

$$\mathbb{P}^n(F) := \left\{ \begin{array}{c} \text{Menge aller homogenen Primideale von} \\ F[T_0,...,T_n], \\ \text{die nicht jedes } T_i \text{ enthalten} \end{array} \right\}$$

Die Forderung, daß nicht alle T_i in den betrachteten Idealen liegen dürfen, entspricht der Forderung, daß nicht alle projektiven Koordinaten eines Punktes im $\mathbb{P}^n$ gleich Null sind.

Man beachte, für $a = (a_0, \ldots , a_n) \in F^{n+1}$ besteht Menge der Nullstellen des homogenen Ideals

$$p_a := (a_iT_j - a_jT_i \mid i,j \in \{0,...,n\} \text{ und } i \neq j \}$$

gerade aus den Punkten der Geraden im k^{n+1} durch a und den Ursprung. Die Ideale der Gestalt p_a sind Primideale von $F[T_0,..., T_n]$, und sie sind maximal unter den homogenen Primidealen dieses Rings, welche keines der T_i enhalten. Der Grund dafür, daß man Mengen von Primidealen betrachten muß besteht darin, daß weitere homogenen Primideale geben kann, die nicht diese Gestalt haben, die aber über dem algebraischen Abschluß diese Gestalt bekommen.[70] Ohne diese zusätzlichen Primideale würden im $\mathbb{P}^n(F)$ Punkte fehlen, und man könnte mit dieser Konstruktion wenig anfangen.

Wie im Fall des $\mathbb{P}^n$ betrachtet man die Mengen

$$U_i := D(T_i) := \{p \in \mathbb{P}^n(F) \mid T_i \notin p \}$$

welche offensichtlich den $\mathbb{P}^n(F)$ überdecken,

$$\mathbb{P}^n(F) = U_0 \cup \ldots \cup U_n .$$

Analog zum Fall des $\mathbb{P}^n$ zeigt man, daß man U_i mit dem affinen Räumen

$$\text{Spec } F[\frac{T_0}{T_i}, \ldots , \frac{T_n}{T_i}]$$

über F identifizieren kann und benutzt die Garben holomorpher Funktionen auf den U_i zur Definition des Begriffs der holomorphen Funktion auf dem $\mathbb{P}^n(F)$. Aus der weitgehenden Analogogie in der Konstruktion von $\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{P}^n(F)$ kann man dann schließen, daß

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(F)\times_F\text{Spec}(k)$$

gilt. Die F-abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{P}^n$ sind dann gerade die Mengen, welche von den abgeschlossenen Mengen des $\mathbb{P}^n(F)$ kommen, nämlich die vollständigen Urbilder der abgeschlossenen Mengen bei der natürlichen Projektion

---

[70] Es geht um die Primideale to Tupeln $a \in k^{n+1}$-{0}, deren Koordinaten nicht alle in F liegen.

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(F)\times_F \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathbb{P}^n(F).$$

Das sind die vollständigen Urbilder von Mengen der Gestalt

$$V^*(I) := \{ p \in \mathbb{P}^n(F) \mid I \subseteq p \}$$

mit homogenen Idealen $I \subseteq F[T_0,\dots, T_n]$. Die obige Aufgabe besteht dann darin, zu zeigen, daß diese Urbilder die Gestalt

$$V^*(I\cdot k[T_0,\dots, T_n])$$

besitzen (was einfach ist).
QED.

Aufgabe 4

(i) Sei ϕ die Abbildung von Mengen

$$\phi:\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{(m+1)\cdot(n+1)-1}, ([x_0,\dots,x_m], [y_0,\dots,y_m]) \mapsto [\dots,x_iy_j, \dots]$$

Man zeige, das Bild von ϕ ist eine abgeschlossene Teilvarietät $V^{m,n}$ im $\mathbb{P}^{(m+1)\cdot(n+1)-1}$ und ϕ definiert einen Isomorphismus $\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n \xrightarrow{\cong} V^{m,n}$ von Varietäten. Die Abbildung heißt auch <u>Segre-Einbettung</u> (vgl. Hartshorne [1], Kapitel I, Aufgabe 2.14).

(ii) Das Produkt von projektiven F-Varietäten ist isomorph zu einer projektiven F-Varietät.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Wir setzen

$$N := (m+1)(n+1) - 1$$

und bezeichnen die Unbestimmten der projektiven Koordinantenringe für $\mathbb{P}^m$ und $\mathbb{P}^n$ mit S_i bzw. T_j , d.h. wir schreiben

$$k[\mathbb{A}^{m+1}] = k[S_0,\dots,S_m] \text{ und}$$

$$k[\mathbb{A}^{n+1}] = k[T_0,\dots,T_n]$$

$$U_i := D(S_i) = \{[x_0,\dots,x_m] \in \mathbb{P}^m \mid x_i \neq 0\}$$

$$V_j := D(T_j) = \{[y_0,\dots,y_n] \in \mathbb{P}^n \mid y_j \neq 0\}$$

Dann sind die U_i und V_j affine Varietäten mit den Koordinaten-Ringen

$$k[U_i] = k[\frac{S_0}{S_i}, \dots , \frac{S_m}{S_i}] \text{ bzw.}$$

$$k[V_j] = k[\frac{T_0}{T_j}, \dots , \frac{T_n}{T_j}] .$$

Sei

$$\{X_{ij}\}_{i=0,\dots,m,j=0,\dots,m}$$

eine Familite von Unbestimmten.

1. <u>Schritt</u>. Die Abbildung

$$\phi:\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n\longrightarrow\mathbb{P}^{(m+1)\cdot(n+1)-1},([x_0,\dots,x_m],[y_0,\dots,y_m]) \mapsto [x_iy_j \mid i=0,\dots,m, j=0,\dots,n]$$

ist eine wohldefinierte reguläre Abbildung, deren Bild in der abgeschlossenen Menge

$$V^*(I)$$

liegt. Dabei sei I das Ideal des Polynomrings

$$k[X_{ij} \mid i=0,...,m \text{ und } j=0,...,n],$$

welches von den homogenen Polynomen der Gestalt

$$X_{ij}\cdot X_{uv} - X_{iv}\cdot X_{uj} \text{ mit } i,u=0,...,m \text{ und } j,v=0,...,n \tag{1}$$

erzeugt wird.

<u>Die Abbildung</u> ϕ <u>ist wohldefiniert</u>.

Für $x \in k^{m+1}$ und $y \in k^{n+1}$ ist $(x_i y_j \mid i=0,...,m,\ j=0,...,n)$ eine (N+1)-Tupel von homogenen Polynomen in den Koordinaten von x und homogen in den Koordinaten von y sind. Ist die i-te Koordinate x_i von x und die j-te Koordinate y_j von y ungleich 0, so ist die Koordinate $x_i y_j$ zum Index-Paar (i,j) dieses (N+1)-Tupels ebenfalls ungleich 0. Das Tupel definiert also einen Punkt

$$[(x_i y_j \mid i=0,...,m,\ j=0,...,n)] \in \mathbb{P}^N.$$

Dieser Punkt ändert sich nicht, wenn man alle Koordinaten von x oder alle Koordinaten von y mit einem Element $c \in k^*$ multipliziert. Der Punkt hängt also nur von den Äquivalenzklasse $[x] \in \mathbb{P}^m$ und $[y]\in\mathbb{P}^n$ ab. Die Abbildung ϕ ist also tatsächlich korrekt definiert.

<u>Das Bild von</u> ϕ <u>liegt in</u> V*(I).

Nach Definition von ϕ hat die projektive Koordinate von $\phi(([x],[y]))$ zum Index-Paar (i,j) den Wert

$$X_{ij}(\phi((x,y))) = x_i\cdot y_j \text{ für jedes i und jedes j.}$$

Deshalb gilt für $[x] \in \mathbb{P}^m$ und $[y] \in \mathbb{P}^n$ und $i,u\in\{0,...,m\}$ und $j,v\in\{0,...,n\}$:

$$(X_{ij}\cdot X_{uv} - X_{iv}\cdot X_{uj})(\ \phi(([x],[y]))) \quad = x_i\cdot y_j\cdot x_u\cdot y_v - x_i\cdot y_v\cdot x_u\cdot y_j = 0.$$

Das Bild von ϕ liegt also tatsächlich in der Nullstellenmenge des von den Polynomen (1) erzeugten Ideals.

<u>Die Abbildung</u> ϕ <u>ist ein Morphismus von geometrischen Räumen</u>.

Auf der Menge

$$U_i \times V_j = \{([x],[y]) \in \mathbb{P}^m \times P^n \mid S_i(x) \neq 0 \text{ und } T_j(y) \neq 0\}$$

können wir die Abbildungsvorschrift für ϕ auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\phi(([x],[y]) = [\frac{x_\mu}{x_i}\cdot\frac{y_\nu}{y_j} y_j \mid \mu=0,...,m,\ \nu=0,...,n] \in D^*(X_{ij}) \subseteq \mathbb{P}^N$$

Wenn wir $D^*(X_{ij})$ mit dem affinen Raum $\mathbb{A}^N$ identifizieren, so bekommt die Abbildungsvorschrift die Gestalt

$$\phi(([x],[y]) = (\frac{x_\mu}{x_i}\cdot\frac{y_\nu}{y_j} \mid \mu=0,...,i-1,i+1,...,m,\ \nu=0,...,j-1,j+1,...,n] \in \mathbb{A}^N.$$

Die Koordinatenfunktinen von ϕ sind also Funktionen der Gestalt

$$\frac{S_\mu}{S_i}\cdot\frac{T_\nu}{T_j} \in k[\frac{S_0}{S_i}, ... , \frac{S_m}{S_i}, \frac{T_0}{T_j}, ... , \frac{T_n}{T_j}]$$

$$\cong k[\frac{S_0}{S_i}, \dots, \frac{S_m}{S_i}]\otimes_k k[\frac{T_0}{T_j}, \dots, \frac{T_n}{T_j}]$$
$$= k[U_i]\otimes_k k[V_j]$$
$$\cong k[U_i \times V_j],$$

d.h. sie sind auf $U_i \times V_j$ reguläre Funktionen. Die Einschränkung von ϕ auf $U_i \times V_j$ ist damit eine Morphismus geometrischer Räume. Da die $U_i \times V_j$ das Produkt $\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$ überdecken, ist auch ϕ ein Morphismus.

2. Schritt. Mit den Bezeichnungen des ersten Schritts gilt

1. $\mathrm{Im}(\phi) = V^*(I)$.
2. ϕ ist als Abbildung $\mathbb{P}^m\times \mathbb{P}^n \longrightarrow V^*(I)$ bijektiv.
3. ϕ^{-1}: $V^*(I) \longrightarrow \mathbb{P}^m\times \mathbb{P}^n$ ist ein Morphismus geometrischer Räume.

Sei ein Punkt von $V^*(I)$ gegeben, sagen wir

$$[x_{ij} \mid i=0,\dots,m,\ j=0,\dots,n\ ].$$

Dann genügen die $x_{ij} \in k^*$ den Gleichungen (1) und es gibt Indizes a und b mit

$$x_{ab} \neq 0.$$

Auf Grund der Gleichungen (i) gilt

$$x_{ij} = \frac{1}{x_{ab}} \bullet x_{ib}\bullet x_{aj} \text{ für } i = 0,\dots,m \text{ und } j = 0,\dots,n. \tag{2}$$

Wegen $x_{ab} \neq 0$ sind

$$[x_{0b},\dots,x_{mb}] \in \mathbb{P}^m \text{ und } [x_{a0},\dots,x_{an}] \in \mathbb{P}^n$$

wohldefinierte Punkte. Es gilt

$$\phi(([x_{0b},\dots,x_{mb}], [x_{a0},\dots,x_{an}])) = [(x_{ib}\bullet x_{aj} \mid i=0,\dots,m,\ j=0,\dots,n)]$$
$$= [\frac{1}{x_{ab}} \bullet (x_{ib}\bullet x_{aj} \mid i=0,\dots,m,\ j=0,\dots,n)]$$
$$= [(x_{ij} \mid i=0,\dots,m,\ j=0,\dots,n)] \qquad \text{(nach (2))}.$$

Der vorgegebene Punkt von $V^*(I)$ liegt also im Bild von φ. Wir haben gezeigt

$$V^*(I) \subseteq \mathrm{Im}(\phi).$$

Die umgekehrt Inklusion besteht auf Grund des ersten Schritts. Damit ist Aussage 1 bewiesen (d.h. $\mathrm{Im}(\phi)$) Insbesondere ist ϕ als Abbildung $\mathbb{P}^m\times \mathbb{P}^n \longrightarrow V^*(I)$ surjektiv.

Auf Grund der obigen Konstruktion gibt es für beliebige $a \in \{0,\dots,m\}$ und $b \in \{0,\dots,n\}$ eine Abbildung

$$\psi_{ab}: V^*(I)\cap D(X_{ab})\longrightarrow U_a\times V_b,\ [(x_{ij}|i=0,\dots,m,j=0,\dots,n)] \mapsto ([x_{0b},\dots,x_{mb}],[x_{a0},\dots,x_{an}])$$

Mit

$$\phi\circ\psi_{ab} = \mathrm{Id}.$$

Sei umgekehrt ein Punkt von $U_a\times V_b$ gegeben, sagen wir $([x_0,\dots,x_m],[y_0,\dots,y_n])$. Dann gilt

$$\psi_{ab}(\phi(([x_0,\dots,x_m],[y_0,\dots,y_n]))) = \psi_{ab}(\ [(x_i\bullet y_j\ |i=0,\dots,m,j=0,\dots,n)])$$

$$=([x_0y_b,...,x_my_b],[x_ay_0,...,x_ay_n])$$
$$= ([y_b\bullet(x_0,...,x_m)],[x_a\bullet(y_0,...,y_n)])$$
$$= ([(x_0,...,x_m)],[(y_0,...,y_n)]).$$

Es gilt also auch $\psi_{ab}\circ\phi|_{U_a\times V_b} = \mathrm{Id}$, d.h.

$$\phi|_{U_a\times V_b} : U_a\times V_b \longrightarrow V^*(I)\bigcap D(X_{ab}) \text{ und } \psi_{ab}:V^*(I)\bigcap D(X_{ab})\longrightarrow U_a\times V_b$$

sind zueinander inverse Bijektionen.

Für $a' \in \{0,..,m\}$ und $b'\in\{0,...,n\}$ stimmen die beiden Abbildungen ψ_{ab} und $\psi_{a'b'}$ auf den gemeinsamen Teilen ihrer Definitionsbereicht überein, da sie dort beide invers zur selben Abbildung sind. Die Mengen $U_a\times V_b$, $a = 0,...,m$, $b = 0,...,n$, überdecken den Raum $\mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n$, so daß die Abbildungen ψ_{ab} gemeinsam eine Abbildung

$$\psi: V^*(I) \longrightarrow \mathbb{P}^m\times\mathbb{P}^n \text{ mit } \phi\circ\psi = \mathrm{Id} \text{ und } \psi\circ\phi = \mathrm{Id}$$

definieren. Insbesondere ist die Abbildung ϕ bijektiv.

Wir haben noch zu zeigen, daß die Abbildung $\psi = \phi^{-1}$ ist ein Morphismus geometrischer Räume. Dazu reicht es zu zeigen, die Abbildung

$$\psi_{ab}:V^*(I)\bigcap D(X_{ab})\longrightarrow U_a\times V_b$$

ist für beliebige $a \in \{0,...,m\}$ und beliebige $b \in \{0, ... , n\}$ ein Morphismus. Wenn wir die Mengen U_a und V_b mit den affinen Räumen $\mathbb{A}^m$ bzw. $\mathbb{A}^n$ identifizieren, so bekommt die Abbildungsvorschrift von ψ_{ab} die folgende Gestalt.

$$\psi_{ab}([(x_{ij}|i=0,...,m,j=0,...,n)])=((\frac{x_{0b}}{x_{ab}},...,\frac{x_{a-1,b}}{x_{ab}},\frac{x_{a+1,b}}{x_{ab}},...,\frac{x_{mb}}{x_{ab}}),(\frac{x_{a0}}{x_{ab}},...,\frac{x_{a,b-1}}{x_{ab}},\frac{x_{a,b+1}}{x_{ab}},...,\frac{x_{an}}{x_{ab}}))$$

Die Koordinatenfunktionen von ψ_{ab} haben also die Gestalt

$$\frac{X_{ib}}{X_{ab}}, \frac{X_{aj}}{X_{ab}}\in k[\frac{X_{ij}}{X_{ab}} \mid i=0,...,m \text{ und } j = 0,..., n] = k[D^*(X_{ab})]$$

d.h. es sind Einschränkungen von regulären Funktionen auf $D^*(X_{ab})$ und damit reguläre Funktionen auf der abgeschlossenen Teilmenge $V^*(I)\bigcap D^*(X_{ab})$.

Insbesondere ist $\psi_{ab}:V^*(I)\bigcap D(X_{ab})\longrightarrow U_a\times V_b$ ein Morphismus geometrischer Räume.

Zu (ii). Wir beschränken uns auf einen Hinweis. Man wiederholte den Beweis von (i) für die Räume $\mathbb{P}^m(F)$ und $\mathbb{P}^n(F)$ anstelle von $\mathbb{P}^m$ und $\mathbb{P}^n$ (und mit homogenen Primidealen anstelle von gewöhnlichen Punkten). Anschließend gehe man zu abgeschlossenen Unterräumen von $\mathbb{P}^m(F)$ und $\mathbb{P}^n(F)$ über.

QED.

1.8 Dimension

1.8.1 Die Dimension einer algebraischen Varietät

1.8.1.1 Die rationalen Funktionen auf einer irreduziblen affinen Varietät

Sei X eine irreduzible affine Varietät über k. Dann ist für jede nicht-leere offene Teilmenge

$$U \subseteq X$$

die k-Algebra

$$\mathcal{O}_X(U)$$

der regulären Funktionen auf U ein Integritätsbereich. Für je zwei nicht-leere offene ineinander liegende Teilmengen U und V,

$$U \subseteq V \subseteq X$$

ist die Restriktion

$$\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U),\ f \mapsto f|_U,$$

injektiv und induziert einen Isomorphismus der Quotientenkörper.

$$\mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(V)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(U)).$$

Auf diese Weise ist eine Garbe auf X definiert. Benutzt man die zu den Inklusionen

$$U \subseteq X$$

gehörigen Isomorphismen

$$\mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(X)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(U)).$$

um die Ringe $\mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(U))$ mit

$$\mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(X)) = \mathbf{Q}(k[X]) =: k(X)$$

zu identifizieren, so bekommt die Garbe die Gestalt

$$U \mapsto k(X).$$

Jeder offenen Menge wird derselbe Körper zugeordnet, und die Garben-Restriktionen sind identische Abbildungen. Die Elemente von k(X) heißen <u>rationale Funktionen</u> auf X. Der Körper k(X) heißt <u>Körper der rationalen Funktionen</u> von X oder auch <u>rationaler Funktionenkörper</u> von X. Die gerade konstruierte Garbe heißt <u>Garbe der rationalen Funktionen</u> auf X. Es ist eine sogenannte <u>konstante Garbe</u>.

Beweis. 1.<u>Schritt</u>. Die Garben-Restriktionen $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$, $f \mapsto f|_U$, für nicht-leere offene Mengen U, V mit $U \subseteq V \subseteq X$ sind injektiv.

Weil X irreduzibel ist, liegt jede nicht-leere offene Menge von X dicht in X. Insbesondere liegt U dicht in X und damit auch in V.

Ist $f|_U = 0$, so stimmt der Morphismus $f: V \longrightarrow \mathbb{A}^1$ auf der dicht liegenden Teilmenge U mit dem Null-Morphismus überein. Nach 1.6.11 (ii) ist f = 0, denn V ist als offene Teil-Prävarietät der affinen Varietät X eine Varietät - nach 1.6.10 (3). Damit ist die Injektivität des k-Algebra-Homomorphismus $f \mapsto f|_U$ bewiesen.

2. <u>Schritt</u>. Für jede nicht-leere offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist $\mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsbereich.

1. <u>Fall</u>: U = X.

Die k-Algebra

$$\mathcal{O}_X(X) = k[X] = k[T]/I(X)$$

ist nullteilerfrei, weil I(X) ein Primideal ist (nach 1.2.5).
2. Fall: U = D(f) ist eine offene Hauptmenge.
Es gilt

$$k[U] = k[X]_f,$$

(nach 1.4.6) und die Nullteilerfreiheit von k[U] folgt aus der von k[X]:
aus

$$\frac{a}{f^i}\cdot\frac{b}{f^j}=\frac{0}{f^\ell}$$

in k[U] folgt

$$0 = f^u\cdot(f^\ell\cdot a\cdot b - f^{i+j}\cdot 0) = f^{u+\ell}\cdot a\cdot b$$

in k[X] für ein $t\in S$. Weil U = D(f) nicht-leer sein soll, ist $f \in k[X] - \{0\}$ von Null verschieden. Weil k[X] nullteilerfeie ist, folgt $a\cdot b = 0$, also

$$a = 0 \text{ oder } b = 0 \text{ in } k[X].$$

Dann ist aber $\frac{a}{f^i} = 0$ oder $\frac{b}{f^j} = 0$.
3. Fall: U beliebig (aber nicht leer).
Weil die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis bilden, gibt es eine nicht-leere offene Hauptmenge D(f), die in U enthalten ist. Nach den ersten Schritt ist die Garben-Restriktion

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(f))$$

ein injektiver Homomorphismus von k-Algebren. Wir können also $\mathcal{O}_X(U)$ als Teilalgebra von $\mathcal{O}_X(D(f))$ ansehen. Letztere hat nach dem 2. Fall keine Nullteiler. Deshalb muß auch $\mathcal{O}_X(U)$ nullteilerfrei sein.

3. Schritt. Für je zwei nicht-leere offene Mengen U und V mit

$$U \subseteq V \subseteq X$$

induziert die Garben-Restriktion

$$\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

einen Isomorphismus der Quotientenkörper.

Wir wissen es ist ein Homomorphismus von k-Algebren, der nach dem ersten Schritt injektiv ist. Weil U nicht leer ist, gibt es eine nicht-leere offeen Hauptmenge D(f) von X mit

$$\emptyset \neq D(f) \subseteq U.$$

Wir haben damit injektive k-Algebra-Homomorphismen

$$k[X] = \mathcal{O}_X(X) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(V) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(D(f)) = k[X]_f\,,$$

wobei die Zusammensetzung dieser Homomorphismen (als Garben-Restriktion) gerade die natürliche Abbildung in den Quotientenring ist,

$$g \mapsto \frac{g}{1}$$

Wir gehen zu den vollen Quotientenringen über und erhalten Injektionen[71]

$$k(X) = \mathbf{Q}(k[X]) = \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(X)) \hookrightarrow \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(V)) \hookrightarrow \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(U)) \hookrightarrow \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(D(f))) = \mathbf{Q}(k[X]_f)$$

wobei die Zusammensetzung die Gestalt

---

[71] Der Übergang zum Quotientenring ist ein exakter Funktor, überführt also injektive in injektiv Abbildungen.

$$\frac{g}{h} \mapsto \frac{g/1}{h/1}$$

hat. Wir können den Quotienten rechts auch in der Gestalt $\frac{g/1}{h/1} = \frac{g/f^i}{h/f^i}$, d.h. jedes Element des Quotientenrings rechts liegt im Bild: die Zusammensetzung ist auch surjektiv. Dann sich aber auch alle anderen Injektionen surjektiv und insbesondere die Restriktion

$$\mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(V)) \longrightarrow \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(U))$$

ein Isomorphismus.
QED.

1.8.1.2 Die rationalen Funktionen auf einer irreduziblen Varietät

Sei X eine (nicht notwendig affine aber) irreduzible Varietät. Dann bleiben die eben im affinen Fall bewiesenen Aussagen zumindest für die affinen offenen Hauptmengen von X richtig.

Für jede nicht-leere offene Teilmenge

$$U \subseteq X$$

die k-Algebra

$$\mathcal{O}_X(U)$$

der regulären Funktionen auf U ein Integritätsbereich. Für je zwei nicht-leere offene ineinander liegende Teilmengen U und V,

$$U \subseteq V \subseteq X$$

ist die Restriktion

$$\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U),\ f \mapsto f|_U,$$

injektiv und induziert - falls U und V affine offeen Hauptmengen von X sind - einen Isomorphismus der Quotientenkörper.

$$k(V) = \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(V)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(U)) = k(U)$$

Weil die affinen offenen Hauptmengen von X eine Topologiebasis von X bilden, ist auf diese Weise ist eine Garbe auf X definiert. Sie ordnet jeder offenen Menge von X denselben Körper zu, der zu den Körpern k(U) (mit U affin und offen in X) isomorph ist und mit

$$k(X)$$

bezeichnet wird. die Garben-Restriktionen sind identische Abbildungen. Die Elemente von k(X) heißen <u>rationale Funktionen</u> auf X. Der Körper k(X) heißt <u>Körper der rationalen Funktionen</u> von X oder auch <u>rationaler Funktionenkörper</u> von X. Die gerade konstruierte Garbe heißt <u>Garbe der rationalen Funktionen</u> auf X. Es ist eine <u>konstante Garbe</u>.

Bemerkung
Ist X eine F-Varietät, so kann man den F-Quotientkörper F(X) in analoger Weise konstruieren.

Beweis. 1.<u>Schritt</u>. Die Garben-Restriktionen $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$, $f \mapsto f|_U$, für nicht-leere offene Mengen U, V mit $U \subseteq V \subseteq X$ sind injektiv.

Die Argumente sind dieselben wie im ersten Schritt des Beweises im affinen Fall.

2. <u>Schritt</u>. (i) Für jede nicht-leere offene Teilmenge $U \subseteq X$ ist $\mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsbereich.
(ii) Die affinen offenen Teilmengen von X bilden eine Topologie-Basis

des topologischen Raums X.

Zu (i). 1. Fall. U eine eine affine offene Teilmenge von X.
Weil X irreduzibel ist, ist der Durchschnitt von je zwei nicht-leeren offenen Teilmengen von X nicht-leer. Das gilt auch, wenn diese nicht-leeren offenen Mengen in U liegen, d.h. U ist irreduzibel. Die Aussage folgt aus dem bereits behandelten Fall, daß X eine affine irreduzible Varietät ist.

2. Fall. U ist beliebig (aber nicht leer).
Weil U nicht leer ist, gibt es eine Punkt in U, sagen wir

$$x \in U.$$

Weil V eine (Prä-) Varietät ist, liegt x in einer affinen offenen Menge, sagen wir

$$x \in V = \text{affine offene Teilmenge von } X.$$

Der Durchschnitt $U \cap V$ ist eine offene Teilmenge von V. Weil die offenen Hauptmengen eine Topologie-Basis von V bilden, gibt es eine offene Hauptmenge W von V mit

$$x \in W \subseteq U.$$

Die offene Hauptmenge W von V ist eine affine offene Teilmenge von X, d.h. nach dem ersten Fall ist

$$\mathcal{O}_X(W) \text{ nullteilerfrei.}$$

Nach dem ersten Schritt ist die Garben-Restriktion

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(W),\ f \mapsto f|_W.$$

injektiv. Wir können $\mathcal{O}_X(U)$ als Teilring von $\mathcal{O}_X(W)$ betrachten. Mit $\mathcal{O}_X(W)$ ist deshalb auch $\mathcal{O}_X(U)$ nullteilerfrei.

Zu (ii). Bei der Behandlung des zweien Falls von (i) haben wir gleichzeitig gezeigt, daß es für jede nicht-leere offene Teilmenge U von X und einen vorgegebenen Punkt $x \in U$ eine affine offene Teilmenge W von X gibt mit $x \in W \subseteq U$.

3. Schritt. Für je zwei nicht-leere affine offene Teilmengen U und V von X mit

$$U \subseteq V \subseteq X$$

induziert die Garben-Restriktion

$$\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$$

einen Isomorphismus der Quotientenkörper.

Das folgt aus dem bereits behandelten affinen Fall mit V anstelle der affine irreduziblen Varietät X. Man beachte, es gilt $\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_V(V)$ und $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_V(U)$.

4. Schritt. Konstruktion der Garbe $\mathcal{R}_X$: $U \mapsto k(X)$ auf X.
Sei U eine offene Teilmenge von X und bezeichne

$$T(U) = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

die Menge der affinen offenen Teilmengen von X, die in U enthalten sind. Wir setzen

$$\mathcal{R}(U) := \{(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(U_\lambda)) \mid f_\lambda|_W = f_\mu|_W \text{ für } \lambda,\mu\in\Lambda \text{ und } W\in T(U) \text{ mit } W\subseteq U_\lambda \cap U_\mu\}$$

Dann ist für jedes $\mu\in\Lambda$ die Abbildung

$$\mathcal{R}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_\mu) = k[U_\mu],\ (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto f_\mu\ . \tag{1}$$

surjektiv: für gegebenes f_μ und gegebenes $\lambda\in\Lambda$ gibt es ein $W \in T(U)$ mit

$$W \subseteq U_\lambda \cap U_\mu.$$

Weil die Garben-Restriktionen von $\mathcal{O}_X$ Isomorphismen

$$\mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(U_\lambda)) \longrightarrow \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(W)) \text{ und } \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(U_\mu)) \longrightarrow \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(W))$$

induzieren, gibt es genau ein f_λ dessen Bild in $\mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(W))$ mit dem Bild von f_μ übereinstimmt.
Dieses Element f_λ hängt nicht von der speziellen Wahl der Menge W ab, denn für je zwei solche Mengen, sagen wir W und W' und die zugehörigen Elemente f_λ und f'_λ gilt

$$f_\lambda|_W = f_\mu|_W \text{ bzw. } f'_\lambda|_{W'} = f'_\mu|_{W'}.$$

Weil die affinen offenen Teilmengen eine Topologie-Basis bilden, gibt es ein $W''\in T(U)$ mit $W''\subseteq W\cap W'$, sodaß gilt

$$f_\lambda|_{W''} = f_\mu|_{W''} \text{ und } f'_\lambda|_{W''} = f'_\mu|_{W''} \text{ also } f_\lambda|_{W''} = f'_\lambda|_{W''}.$$

Weil die Einschränkung auf W" einen Isomorphismus auf den Quotientenkörpern induziert, folgt $f_\lambda = f'_\lambda$.

Wir haben zu vorgegebenen f_μ eine Familie von $f_\lambda \in \mathbf{Q}(\mathcal{O}_X(U_\lambda))$ gefunden, welche auf f_μ abgebildet wird, vorausgesetzt die Familie liegt $\mathcal{R}(U)$. Zum Beweis der Surjektivitität von (1) haben noch zu zeigen, für je zwei $\lambda',\lambda'' \in \Lambda$ gilt $f_{\lambda'}|_W=f_{\lambda''}|_W$ für ein $W\in T(U)$, welches ganz in $U_{\lambda'}\cap U_{\lambda''}$ liegt. Nach Konstruktion gibt es Mengen W', $W''\in T(U)$ mit

$$W' \subseteq U_{\lambda'}\cap U_\mu \text{ bzw. } W'' \subseteq U_{\lambda''}\cap U_\mu$$

und

$$f_{\lambda'}|_{W'} = f_\mu|_{W'} \text{ bzw. } f'_{\lambda''}|_{W''} = f'_\mu|_{W''}.$$

Weil X irrduzibel ist, ist der Durchnitt $W'\cap W''$ nicht leer, und es gibt ein $W\in T(U)$, welches in diesem Durchschnitt liegt. Dann gilt aber auch

$$f_{\lambda'}|_W = f_\mu|_W \text{ und } f'_{\lambda''}|_W = f'_\mu|_W \text{ , also } f_{\lambda'}|_W=f_{\lambda''}|_W .$$

Damit ist die Surjektivität von (1) bewiesen.
Eine analoge Argumentation zeigt, daß alle f_λ gleich 0 sein müssen, wenn f_μ es ist, d.h. (1) ist sogar bijektiv.
Für je zwei offene Mengen U und V von X mit $V \subseteq U$ können wir T(V) als Teilfamilie

$$T(V) = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$$

der Familie $T(U) = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ schreiben, d.h. $\Lambda' \subseteq \Lambda$. Die Abbildung

$$\mathcal{R}(U) \longrightarrow \mathcal{R}(V),\ (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda'}$$

ist ein Homorphismus von k-Algebren und wegen der Bijektiviät der Abbildungen (1) sogar ein Isomorphismus von Körpern. Wir erhalten auf diese Weise eine Garbe

$$U \mapsto \mathcal{R}(U).$$

Weil die Garben-Restriktionen Isomorphismen sind, können wir für jedes U den Körper $\mathcal{R}(U)$ mit $\mathcal{R}(X) =: k(X)$ identifizieren. Die Garben-Restriktionen werden so zu identischen Abbildungen.
QED.

1.8.1.3 Die Dimension einer Varietät

Sei X eine irreduzible Varietät über k. Die Dimension von X ist definiert als der Transzendenzgrad des rationalen Funktionenkörpers von X und wird mit

$$\dim X := \text{tr.}\deg_k k(X)$$

bezeichnet.

Ist X reduzibel und sind $X_1, \dots, X_m$ die irreduziblen Komponenten von X, so ist die Dimension von X definiert als Maximum der Dimensionen der Komponenten von X,

$$\dim X := \max \{\dim X_1, \dots, \dim X_m\}.$$

Bemerkung

Ist X eine affine Varietät und ist

$$k[X] = k[x_1, \dots, x_n],$$

so ist dim X die Maximalzahl über k algebraisch unabhängiger Elemente unter den Erzeugern $x_1, \dots, x_n$.

Beweis. Seien $X_1,\dots,X_r$ die irreduziblen Komponenten von X. Dann gilt

$$I(X) = I(X_1)\cap\dots\cap I(X_n).$$

Wir können die Reihenfolge der X_i so wählen, daß

$$d = \dim X = \dim X_1.$$

Betrachten wir die Surjektion

$$h{:}k[X] \longrightarrow k[X_1],\ f \mapsto f|_{X_1}.$$

Wegen $k[X_1] = k[h(x_1), \dots, h(x_n)]$ und $\text{tr.deg}_k k[X_1] = \dim X_1 = d$ gibt es unter den $h(x_i)$ d algebraisch unabhängige (und jeweils d+1 sind algebraisch abhängig). Wir können die Reihenfolge der x_i so wählen, daß

$$h(x_1), \dots, h(x_d) \text{ algebraisch unabhängig über } k$$

sind. Dann sind aber auch $x_1, \dots, x_d$ algebraisch unabhängig über k.

Wir wählen jetzt d+1 Elemente unter den x_i, sagen wir

$$x_{i_1},\dots,x_{i_{d+1}}$$

Nach Wahl von d sind dann die Einschränkungen dieser Elemente auf X_j algebraisch abhängig über k, d.h. es gibt ein Polynom

$$F_j \in k[T_1,\dots,T_{d+1}] - \{0\} \text{ mit } F_j(x_{i_1},\dots,x_{i_{d+1}})|_{X_j} = 0.$$

Wir setzen

$$F := F_1\bullet\dots\bullet F_r \in k[T_1,\dots,T_{d+1}] - \{0\}$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$F(x_{i_1},\dots,x_{i_{d+1}}) = 0$$

in jedem Punkt von X. Wir haben gezeigt, es gibt d algebraisch unabhängige unter den x_i und jeweils d+1 von ihnen sind algebraisch abhängig.

QED.

1.8.2 Die Dimension echter abgeschlossener Teilvarietäten.

Seien X eine irreduzible Varietät und $Y \subsetneq X$ eine echte abgeschlossene und irreduzible Teilvarietät. Dann gilt dim Y < dim X.

Beweis. 1. <u>Schritt</u>. Reduktion auf den Fall X und Y affin,

Sei $y \in Y$ ein Punkt und U eine affine offene Teilmenge von X, die den Punkt y enthält. Dann ist $Y\cap U$ eine affine offene Teilmenge von Y. Nach 1.8.1.2 gilt

$$k[U] = k[X] \text{ und } k[Y\cap U] = k[Y]$$

also

$$\dim U = \dim X \text{ und } \dim Y\cap U = \dim Y.$$

Als offene Teilmengen von X und Y sind U bzw. $U\cap Y$ ebenfalls irreduzibel. Außerdem ist $U\cap Y$ abgeschlossen in U und außerdem auch echt enthalten in U, denn aus $U\cap Y = U$ würde folgen, daß auch die Abschließungen in X gleich sind, d.h

$$Y = \overline{U\cap Y} = \overline{U} = X$$

Die äußeren Gleichheitszeichen gelten, weil in einer irreduziblen Menge alle nicht-leeren offenen Teilmengen dicht liegen. Die Gleichheit von X und Y widerspricht aber unseren Vorausetzungen. Also ist $U\cap Y$ eine echte abgeschlossene und irreduzible Teilmenge von U, d.h. es reicht zu zeigen $\dim U\cap Y < \dim U$.

2. <u>Schritt</u>. Der Fall X und Y affin.

Wir schreiben

$$A := k[X] = k[x_1,...,x_n]$$

Der Koordinatenring von Y hat dann die Gestalt

$$k[Y] = A/P$$

mit einem Primideal $P \ne 0$ von A. Bezeichne

$$y_i := x_i \bmod P$$

die Restklasse von x_i in k[Y]. Dann gilt

$$k[Y] = k[y_1,...,y_n].$$

Wir setzen

$$d := \dim X \text{ und } e := \dim Y.$$

Wir können die Reihenfolge der x_i so wählen, daß

$$y_1,...,y_e \text{ algebraisch unabhängig über } k$$

sind. Dann sind auch $x_1,...,x_e$ algebraisch unabhängig über k.[72] Deshalb gilt

$$e \le d.$$

Angenommen es gilt sogar e = d.

Weil P von 0 verschieden ist, gibt es ein von Null verschiedenes Element in P, sagen wir

$$0 \ne f \in P.$$

Auf Grund unserer Annahme sind dann die Elemente $f,x_1,...,x_e$ algebraisch abhängig über k, d.h. es gibt ein Polynom

$$H \in k[T_0,...,T_e] - \{0\} \text{ mit } H(f,x_1,...,x_e) = 0 \text{ in } k[X]$$

---

[72] weil jedes von 0 verschiedene Polynom mit der Nullstelle $(x_1,...,x_e)$ durch Anwenden des natürlichen Homomorphismus $A \longrightarrow A/P$ in ein Polynom mit der Nullstelle $(y_1,...,y_e)$ übergeht.

Wir können annehmen, daß T_0 kein Teiler von H ist (weil f von Null verschieden ist und k[X] ein Integritätsbereich. Es gilt dann

$$H(0,T_1,...,T_e) \in k[T_1,...,T_e] - \{0\}$$

Wir wenden den natürlichen Homomorphismus $A \longrightarrow A/P$ and und erhalten

$$H(0,y_1,...,y_e) = 0 \text{ in } k[Y].$$

Weil $H(0,T_1,...,T_e)$ nicht das Nullpolynom ist, widerspricht dies der Wahl der Elemente $y_1,...,y_e$ als algebraisch unabhängig über k. Dieser Widerspruch zeigt, daß die Annahme e = d falsch sein muß, d.h. es gilt e < d, wie behauptet.

QED.

1.8.3 Dimension des Produkts irreduzibler Varietäten

Seien X und Y irreduzible Varietäten über k. Dann gilt

$$\dim X\times Y = \dim X + \dim Y.$$

Beweis. Wir im ersten Schritt des Beweises von 1.8.2 reduzieren wir auf den Fall, daß X und Y affin sind und wählen maximale Anzahlen algebraisch unabhängiger Elemente

$$x_1,..., x_d \in k[X] \text{ bzw. } y_1,..., y_e \in k[Y],$$

d.h.

$$d = \dim X \text{ und } e = \dim Y.$$

Wir schreiben

$$k[x] := k[x_1,..., x_d]$$
$$k[y] := k[y_1,..., y_e]$$

und beachten, daß k[x] und k[y] isomorph zu Polynomringen über k sind. Deshalb ist

$$k[x]\otimes_k k[y] \cong k[x,y]$$

und $x_1,..., x_d, y_1,..., y_d$ sind über k algebraisch unabhängige Elemente von

$$k[x,y] = k[x]\otimes k[y] \hookrightarrow k[X]\otimes_k k[Y] = k[X\times Y]$$

Außerdem ist

k(X) ein endlich-dimensionaler Vektorraum über Q(k[x]) := k(x) und
k(Y) ein endlich-dimensionaler Vektorraum über Q(k[y]) := k(y),

also

$k(X)\otimes_k k(Y)$ endlich erzeugter $k(X)\otimes_k k(y)$-Modul
$k(X)\otimes_k k(y)$ endlich erzeugter $k(x)\otimes_k k(y)$-Modul,

zusammen also

$k(X)\otimes_k k(Y)$ endlich erzeugter $k(x)\otimes_k k(y)$-Modul.

Nun ist $k(x)\otimes_k k(y)$ ein Quotientenring von $k[x]\otimes_k k[y] = k[x,y]$, also enthalten im Quotientenkörper k(x,y). Wir können also mit k(x,y) über $k[x]\otimes_k k[y]$ tensorieren und erhalten

$(k(X)\otimes_k k(Y))\otimes_{k[x]\otimes_k k[y]} k(x,y)$ ist enlich erzeugter k(x,y)-Vektorraum.

Nun ist $k(X)\otimes_k k(Y)$ ein Quotientenring des Integritätsbereichs (vgl. 1.5.4 (ii))

$$k[X]\otimes_k k[Y] = k[X\times Y].$$

Weiter ist

$$(k(X)\otimes_k k(Y))\otimes_{k[x]\otimes_k k[y]} k(x,y) \tag{1}$$

ein Quotientenring von $k(X)\otimes_k k(Y)$ und damit ein solcher von $k[X\times Y]$ und damit insbesondere nullteilerfrei. Nun sind nullteilerfreie Algebren, die als Vektorräume endlich-dimensioinal ist selbst Körper.. Deshalb ist (1) ein Körper, enthält $k[X\times Y]$ und ist ein Quotientenring von $k[X\times Y]$. Damit ist (1) der Quotientenkörper $k(X\times Y)$ von $k[X\times Y]$, und wir haben gezeigt,

$k(X\times Y)$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $k(x,y)$.

Wir haben damit d+e algebraisch unabhängige Elemente $x_1,\dots, x_d, y_1,\dots, y_e$ von $k(X\times Y)$ gefunden für welche $k(X\times Y)$ algebraisch über $k(x,y)=k(x_1,\dots, x_d, y_1,\dots, y_e)$ ist, d.h. des gilt

$$\mathrm{tr.deg}_k\, k(X\times Y) = d+e = \mathrm{tr.deg}_k k(X) + \mathrm{tr.deg}_k k(Y),$$

also

$$\dim X\times Y = \dim X + \dim Y,$$

wie behauptet.
QED.

1.8.4 Aufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, es gilt $\dim \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{P}^n = n$.

Beweis. Der Koordinatenring des $\mathbb{A}^n$ ist gleich

$$k[\mathbb{A}^n] = k[T_1,\dots,T_n].$$

Diese Ring ist nullteilerfrei, d.h. $\mathbb{A}^n$ ist irreduzibel und

$$\dim \mathbb{A}^n = \mathrm{tr.deg}_k\, k[T_1,\dots,T_n].$$

Die T_i sind algebraisch unabhängig über k. Unter n Elementen ist n die größtmögliche Anzahl linear unabhängiger, deshalb gilt nach der Bemerkung von 1.8.1.3

$$\dim \mathbb{A}^n = \mathrm{tr.deg}_k\, k[T_1,\dots,T_n] = n.$$

Der Raum $\mathbb{P}^n = V^*(0)$ ist nach 1.7.5 Aufgabe 2 (ii) irreduzibel und wird nach Definition von offenen affinen Teilmengen überdeck die isomorph sind zum $\mathbb{A}^n$. Deshalb gilt

$$\dim \mathbb{P}^n = \dim \mathbb{A}^n = n.$$

QED.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, eine Varietät der Dimension 0 ist endlich.
Beweis. Sei X eine Varietät der Dimension 0. Als Prävarietät ist X noethersch (vgl. 1.6.2 Aufgabe 1) und damit Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Varietäten (vgl. 1.6.10 Aufgabe 3). Wir können also annehmen,

X ist irreduzibel.

Als Prävarietät ist X quasi-kompakt (vgl. 1.6.1) und Vereinigung von affinen offenen Teilmengen. Insbesondere wird X von endlich vielen solcher affiner offener Teilmengen überdeckt. Wir können also zusätzlich annehmen,

X ist affin.

Nach Voraussetzung ist

$$0 = \dim X = \mathrm{tr.deg}_k\, k[X],$$

d.h. k[X] ist algebraisch über X. Weil k algebraisch abgeschlossen ist, gilt

$$k[X] = k.$$

Nach 1.3.3 (i) gibt es eine bijektive Abbildung

$$X \longrightarrow \text{Specm } k[X]$$

Die Anzahl der Punkte von X ist damit

$$\# X = \# \text{Specm } k[X] = \# \text{Specm } k = \# \{0\} = 1.$$

Diese Zahl ist endlich.
QED.

Aufgabe 3

Sei $f \in k[T_1,...,T_n]$ ein irreduzibles Polynom. Zeigen Sie die Nullstellenmenge

$$V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$$

von f ist einer (n-1)-dimensionale irreduzible Teilvarietät des $\mathbb{A}^n$.
Beweis. Weil $k[T_1,...,T_n]$ ein ZPE-Ring ist, sind irreduzible Elemente dasselbe wie Primelemente, d.h. das von f erzeugte Ideal

$$f\bullet k[T_1,...,T_n]$$

ist ein Primideal, d.h. der Koordinatenring von

$$X := V(f)$$

ist gleich

$k[X] = k[T_1,...,T_n]/f\bullet k[T_1,...,T_n]$ und damit ein Integritätsbereich also irreduzibel.

Als irreduzibles Polynom ist f nicht identisch 0, d.h. V(f) ist echt enthalten im $\mathbb{A}^n$. Weil $\mathbb{A}^n$ und X irreduzibel sind, folgt

$$\dim X < \dim \mathbb{A}^n = n.$$

Sei

$$x_i := T_i \bmod (f)$$

die Restklasse von T_i in k[X]. Jedes Polynom $g \in k[T_1,...,T_n]$ mit $g(x_1,...,x_n) = 0$ ist ein Vielfaches von f. Weil f irreduzibel ist, ist f keine Konstante, d.h. es kommt mindestens eine Unbestimmte T_i in f wirklich vor. Wir wählen die Numerierung der T_i so, daß T_n in f wirklich vorkommt. Dann kommt in jedem Polynom nicht-konstanten Polynom g mit $g(x_1,...,x_n) = 0$ die Unbestimmte T_n wirklich vor (weil dieses ein Vielfaches von f ist). Wir haben gezeigt,

$$x_1,...,x_{n-1} \text{ sind algebraisch unabhängig.}$$

Wegen $f(x_1,...,x_n) = 0$ sind $x_1,...,x_n$ algebraisch abhängig. Damit gilt

$$\dim X = n-1$$

(nach der Bemerkung von 1.8.1.3).
QED.

Aufgabe 4
Sei X eine irreduzible F-Varietät. Dann ist dim X auch der Transzendenzgrad von F(X) über F.
Beweis. Weil X von F-offenen affinen Teilmengen überdeckt wird, ist dim X gleich der Dimension einer solchen Teilmenge. Wir können also annehmen, X ist affin.
Dann gilt

$$\begin{aligned}\dim X &= \text{tr.deg}_k\, k[X] \\ &= \text{tr.deg}_k\, k\otimes_F F[X]\end{aligned}$$

$= \text{tr.deg}_F\, F[X]$.

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil jede Transzendenzbasis von F[X] über F eine Transzendenzbasis von $k\otimes_F F[X]$ über k ist (weil das Tensorprodukt mit direkten Summen kommutiert und deshalb F-linear unabhängige Potenzprodukte beim Tensorieren mit k in k-linear unabhängige Protenzprodukte übergehen).
QED.

1.9 Einige Ergebnisse über Morphismen

1.9.1 Eigenschaften von Morphismen von affinen Varietäten

Seien $\phi: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus affiner Varietäten und

$$\phi^*: k[Y] \longrightarrow k[X], f \mapsto \phi^*(f) = f\circ\phi,$$

der auf den Koordinatenringen induzierte k-Algebra-Homomorphismus. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) ϕ^* ist genau dann surjektiv, wenn ϕ die eine Isomorphismus gefolgt von der natürlichen Einbettung $Z \hookrightarrow Y$ einer abgeschlossenen Teilvarietät ist.

(ii) ϕ^* ist genau dann injektiv, wenn das Bild $\phi(X)$ dicht liegt in Y.

(iii) Ist X irreduzibel, so ist auch die Abschließung $\overline{\phi(X)}$ des Bildes von X irreduzibel, und es gilt dim $\overline{\phi(X)} \le$ dim X und dim $\overline{\phi(X)} \le$ dim Y.

(iv) Seien F ein Teilkörper von k und $\phi: X \longrightarrow Y$ ein über F definierter Morphismus von F-Varietäten. Dann ist $\overline{\phi(X)}$ eine F-Teilvarietät von Y.

Bemerkung

Das Bild $\phi(X)$ ist im allgemeinen nicht abgeschlossen in X. Ist zum Beispiel

$X := \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \mid xy = 1\}$

$Y := \mathbb{A}^1$

und ϕ die Projektion auf die x-Achse

$\phi: X \longrightarrow Y, (x,y) \mapsto x,$

ist das Bild die x-Achse ohne den Ursprung,

$\phi(X) = \mathbb{A}^1 - \{0\},$

also eine Menge, die nicht abgeschlossen ist.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Sei ϕ^* surjektiv und $I := \text{Ker}(\phi^*)$. Nach dem Homomorphiesatz induziert ϕ^* einen Isomorphismus von k-Algebren

$$h:k[Y]/I \xrightarrow{\cong} k[X] \text{ mit } \phi^* = h\circ\rho,$$

wobei $\rho: k[Y] \longrightarrow k[Y]/I$ den natürlichen Homomorphismus auf den Faktorring bezeichnet.

Weil k[X] endlich erzeugt und reduziert ist, gilt dasselbe für k[Y]/I, d.h. k[Y]/I ist der Faktorring eines Polynomrings nach einem radikalten Ideal und damit selbst Koordinatenring einer affinen Varietät

$$Z = V_Y(I),$$

(vgl. 1.3.1).Wenn wir den Faktorring k[Y]/I mit dem Koordinatenring von Z identifizieren, wird ρ gerade zur Einschränkung auf die Teilvarietät Z,

$$\rho = i^*: k[Y] \twoheadrightarrow k[Y]/I = k[Z], f \mapsto f|_Z .$$

Dabei bezeichne i die natürliche Einbettung

$$i: Z = V(I) \hookrightarrow Y$$

Der Isomorphismus der Koordinantenringe k[Z] und k[X] bekommt dann die Gestalt

$$h = \psi^*: k[Z] \xrightarrow{\cong} k[X]$$

mit einem Isomorphismus affiner Varietäten

$$\psi: X \xrightarrow{\cong} Z$$

(vgl.Bemerkungen 1.4.7 (iii) und 1.4.7 (vi)). Wegen $\phi^* = h\circ\rho = \psi^*\circ i^*$ folgt

$$\phi = i\circ\psi: X \underset{\psi}{\xrightarrow{\cong}} Z \underset{i}{\hookrightarrow} Y.$$

Damit hat ϕ die behauptpete Gestalt.

Sei jetzt umgekehrt ϕ ein Isomorphismus ψ gefolgt der natürlichen Einbettung einer abgeschlossenen Teilvarieten,

$$\phi = i\circ\psi: X \underset{\psi}{\xrightarrow{\cong}} Z \underset{i}{\hookrightarrow} Y.$$

Dann gilt nach Bemerkung 1.4.7 (vi)

$$\phi^* = \psi^*\circ i^*,$$

wobei ψ^* ein Isomorphismus ist und i^* eine Surjektion. Also ist ϕ^* surjektiv.

Zu (ii). Nach 1.1.4 (2) ist die Abschließung der Menge $\phi(X)$ gleich

$$\overline{\phi(X)} = V_Y(I(\phi(X)))$$

und

$$\begin{aligned} I(\phi(X)) &= \{f \in k[Y] \mid f(y) = 0 \text{ für jedes } y \in \phi(X)\} \quad (\text{Definition von } I_Y(?)) \\ &= \{f \in k[Y] \mid f(\phi(x)) = 0 \text{ für jedes } x \in X\} \\ &= \{f \in k[Y] \mid \phi^*(f)(x) = 0 \text{ für jedes } x \in X\} \quad (\text{Definition von } \phi^*) \\ &= \{f \in k[Y] \mid \phi^*(f) = 0 \text{ in } k[X]\} \\ &= \mathrm{Ker}(\phi^*) \end{aligned}$$

also

$$\overline{\phi(X)} = V_Y(\mathrm{Ker}(\phi^*)) \qquad (1)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \phi(X) \text{ liegt dicht in } Y &\Leftrightarrow \overline{\phi(X)} = Y \\ &\Leftrightarrow V_Y(\mathrm{Ker}(\phi^*)) = V_Y(\sqrt{0})) \qquad (\text{wegen (1)}) \\ &\Leftrightarrow^{73} \mathrm{Ker}(\phi^*) = \sqrt{0} \\ &\Leftrightarrow^{74} \mathrm{Ker}(\phi^*) = 0 \text{ in } k[Y] \\ &\Leftrightarrow \phi^* \text{ ist injektiv.} \end{aligned}$$

Zu (iii). Die Irreduzibilität von $\overline{\phi(X)}$ folgt aus 1.2.3 (ii) und 1.2.3 (i)(b).

Wir betrachten ϕ als Morphismus

$$\phi: X \longrightarrow \overline{\phi(X)}.$$

---

[73] Die Implikation '$\Leftarrow$' ist trivial, die Umkehrung '$\Rightarrow$' folgt aus dem Hilbertschen Nullstellensatz 1.1.2.

[74] k[Y] ist als Koodinatenring reduziert.

Dann liegt das Bild $\phi(X)$ dicht in $\overline{\phi(X)}$, d.h. nach (ii) ist der k-Algebra-Homomorphismus

$$\phi^*: k[\overline{\phi(X)}] \longrightarrow k[X]$$

injektiv, d.h. wir können $k[\overline{\phi(X)}]$ als Teilalgebra von k[X] ansehen. Damit gilt

$$\begin{aligned}\dim \overline{\phi(X)} &= \text{tr.-deg}_k\, k[\overline{\phi(X)}] && \text{(nach 1.8.1.3 weil } \overline{\phi(X)} \text{ irreduzibel ist)}\\ &\le \text{tr.-deg}_k\, k[X] && \text{(wegen } k[\overline{\phi(X)}] \subseteq k[X])\\ &= \dim X && \text{(nach 1.8.1.3 weil X irreduzibel ist)}\end{aligned}$$

Damit besteht die erste Ungleichung zwischen den Dimensionen. Wir haben noch die zweite Ungleichung zu beweisen.

Sei $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ die Zerlegung von Y in irreduzible Komponenten (vgl. 1.2.4). Wegen

$$\overline{\phi(X)} \subseteq Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$$

und $\overline{\phi(X)}$ irreduzibel, gibt es ein i mit

$$\overline{\phi(X)} \subseteq Y_i.$$

Es reicht zu zeigen

$$\dim \overline{\phi(X)} \le \dim Y_i$$

denn dann gilt auch $\dim \overline{\phi(X)} \le \dim Y$ (vgl. 1.8.1.3). Nach 1.8.2 besteht aber sogar die entsprechende echte Ungleichung, falls die Inklusion $\overline{\phi(X)} \subseteq Y_i$ echt ist. Falls sie nicht echt ist, sind trivialerweise auch die Dimensionen gleich.

Zu (iv). Wie wir im Beweis von (ii) angemerkt haben (vgl. Formel (1)) ist die Abschließung des Bildes gleich

$$\overline{\phi(X)} = V_Y(\mathrm{Ker}(\phi^*))$$

und damit

$$k[\overline{\phi(X)}] = k[Y]/\mathrm{Ker}(\phi^*)$$

Man beachte der Faktorring rechts ist reduziert, weil er isomorph ist zu einem Teilring von k[X].

Nach Voraussetzung kommt $\phi: X \longrightarrow Y$ von einem Homomorphismus von F-Algebren

$$h: F[Y] \longrightarrow F[X].$$

Dieser induziert einen Homomorphismus von k-Algebren

$$h\otimes_F k: k[Y] = F[Y] \otimes_F k \longrightarrow F[X]\otimes_F k = k[X]$$

und damit den Morphismus

$$\phi = (h\otimes_F k)^{\#}: X \longrightarrow Y$$

(vg. 1.4.9 und Bemerkung 1.4.7 (vi)). Der Homomorphismus h ist Teil einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(h) \longrightarrow F[Y] \xrightarrow{h} F[X],$$

also $\phi^* = h\otimes_F k$ Teil einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(h)\otimes_F k \longrightarrow F[Y]\otimes_F k \xrightarrow{\phi^*} F[X]\otimes_F k.$$

Damit ist

$$\mathrm{Ker}(\phi^*) = \mathrm{Ker}(h)\otimes_F k.$$

Das die Varietät $\overline{\phi(X)}$ definierende Ideal Ker(ϕ*) wird also von einem Ideal

$$\mathrm{Ker}(h) \subseteq F[Y]$$

der F-Struktur von Y erzeugt. Der Koordinatenring $k[\overline{\phi(X)}]$ hat somit die F-Struktur

$$F[\overline{\phi(X)}] = F[Y]/\mathrm{Ker}(h).$$

QED.

Zum Beweis des Hauptergebnisses dieses Abschnitts benötigen wir einige algebraische Aussagen.

1.9.2 Ring-Homomorphismen mit Werten in einem Körper

Seien B ein reduzierter Ring, $A \subseteq B$ ein Teilring, wobei B über A endlich erzeugt sei,

$$A \subseteq B = A[b_1, \ldots, b_r], \text{ B reduziert.}$$

Weiter sei ein Homomorphismus

$$h: A \longrightarrow K$$

mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper K gegeben. Wir suchen nach Bedingungen, die sicherstellen, daß sich h auf den Ring B fortsetzen läßt. Wir beginnen mit dem Fall einfach erzeugter Ring-Erweiterungen (r = 1).

1.9.3 Fortsetzbarkeit auf einfach erzeugte Algebren

Seien B ein reduzierter Ring und $A \subseteq B$ ein Teilring mit

$$B = A[b] = A[T]/I.$$

Sei J(I) das Ideal von A der höchsten Koeffizienten der Elemente von I. Dann läßt sich jeder Ring-Homomorphismus

$$h: A \longrightarrow K$$

mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper K mit

$$h(J(I)) \neq 0$$

zu einem Homomorphismus $B \longrightarrow K$ fortsetzen.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein Polynom

$$f = f_0 + f_1\bullet T + \ldots + f_m\bullet T^m \in I \subseteq A[T] \text{ mit } h(f_m) \neq 0.$$

Wir können annehmen, f ist so gewählt, daß m den kleinstmöglichen Wert annimmt in Bezug auf alle Polynome von I, deren höchster Koeffizient nicht im Kern von h liegt. Weil die natürliche Einbettung

$$A \hookrightarrow B = A[B] = A[T]/I$$

injektiv ist, gilt

$$I \cap A = 0. \tag{1}$$

Sei $\tilde{h}$ die Fortsetzung des Ring-Homomorphismus h auf die Polynomringe in der Unbestimmten T zu einem Ring-Homomorphismus

$$\tilde{h}: A[T] \longrightarrow K[T], \sum_i a_i\bullet T^i \mapsto \sum_i h(a_i)\bullet T^i .$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $\tilde{h}(I) \cap K = \{0\}$.

Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, two heads] & A[T] \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\widetilde{h}"] & B \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{h}(I) \arrow[r] \arrow[d, hook] & h(A)[T] \arrow[r] \arrow[d, hook] & h(A)[T]/\widetilde{h}(I) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{h}(I)\bullet\mathbf{Q}(h(A))[T] \arrow[r] & \mathbf{Q}(h(A))[T] \arrow[r] & \mathbf{Q}(h(A))[T]/\widetilde{h}(I)\bullet\mathbf{Q}(h(A))[T] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Man beachte, der untere mittelere vertikale Pfeil bezeichnet einen injektiven Ring-Homomorphismus, weil die natürlichen Abbildung in den Quotienten-Ring

$$h(A) \longrightarrow \mathbf{Q}(h(A))$$

injektiv ist, denn $h(A) \subseteq K$ ist Teilring des Körpers K, also nullteilerfrei. Weiter ist der rechte untere Ring nicht der Nullring, weil

$$\widetilde{h}(I)\bullet\mathbf{Q}(h(A))[T]$$

ein echtes Ideal des Polynomrings Q(h(A))[T] ist: andernfalls wäre

$$1 \in \widetilde{h}(I)\bullet\mathbf{Q}(h(A))[T],$$

also

$$a \in \widetilde{h}(I) \text{ für ein } a \in h(A) - \{0\}$$

(a ist der Hauptnenner in der Relation davor), was unserer Annahme $\widetilde{h}(I) \cap K = \{0\}$ widerspricht. Im Diagramm steht also tatsächlich rechts unten nicht der Nullring. Weil der Körper K über dem Teilkörper $\mathbf{Q}(h(A))$ treuflach ist, bleibt dieser Ring vom Nullring verschieden, wenn man ihn mit K über $\mathbf{Q}(h(A))$ tensoriert. Wir tensorieren die untere Zeile des Diagramms mit K über $\mathbf{Q}(h(A))$ und erhalten so ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, two heads] & A[T] \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\widetilde{h}"] & B \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{h}(I) \arrow[r] \arrow[d, hook] & h(A)[T] \arrow[r] \arrow[d, hook] & h(A)[T]/\widetilde{h}(I) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{h}(I)\bullet K[T] \arrow[r] & K[T] \arrow[r] & K[T]/\widetilde{h}(I)\bullet K[T] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dessen Ring rechts unten weiterhim vom Nullring verschieden ist. Das bedeutet, das Ideal $\widetilde{h}(I)\bullet K[T]$ ist ein echtes Ideal des Polynomrings K[T] über dem algebraisch abgeschlossenen Körper K und besitzt deshalt eine Nullstelle $c \in K$. Der Ring-Homomorphismus

$$\alpha: K[T] \twoheadrightarrow K,\ f(T) \mapsto f(c),$$

bildet das Ideal $\widetilde{h}(I)\bullet K[T]$ in die Null ab. Er faktorisiert sich deshalb über den Ring rechts unten im Diagramm und führt so zu einem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & A[T] \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\widetilde{h}"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{h}(I)\cdot K[T] \arrow[r] \arrow[d, two heads] & K[T] \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\alpha"'] & K[T]/\widetilde{h}(I)\cdot K[T] \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & K \arrow[r, phantom, "="] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Für $x \in A$ gilt

$$\begin{aligned}
\alpha(\widetilde{h}(x)) &= \alpha(h(x)) && \text{(Definition von } \widetilde{h} \text{ und } x \in A) \\
&= h(x) && (\alpha \text{ ist K-Algebra-Homomorphismus und } h(x) \in K),
\end{aligned}$$

d.h. es ist

$$h = \alpha\circ\widetilde{h}|_A.$$

Wegen der Kommutativität des Diagramms ist $\alpha\circ\widetilde{h} = \gamma\circ\beta\circ\rho$, also

$$h = \alpha\circ\widetilde{h}|_A = \gamma\circ\beta\circ\rho|_A.$$

Nun ist die Einschränkung der natürlichen Surjektion $A[T] \longrightarrow B$ auf A gerade die natürliche Einbettung $A \hookrightarrow B$, d.h. $\gamma\circ\beta: B \longrightarrow K$ ist gerade die gesuchte Forsetzung von h auf B.

2. <u>Fall</u>: $\widetilde{h}(I) \cap K \neq \{0\}$.
Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß dieser Fall nicht eintritt, indem wir ihn zum Widerspruch führen. Sei also

$$0 \neq c \in \widetilde{h}(I) \cap K.$$

Dann gibt es ein Polynom

$$g = g_0 + g_1\cdot T + \ldots + g_n\cdot T^n \in I \subseteq A[T]$$

mit

$$h(g_0) = c \neq 0 \text{ und } h(g_i) = 0 \text{ für jedes } i > 0.$$

Division von g durch f mit Rest führt zu Polynomen $q, r \in A[T]$ mit

$$f_m^d\cdot g = q\cdot f + r \text{ in } A[T] \text{ und } \deg(r) < \deg(f) = m.$$

Wir wenden den Homomorphismus $\widetilde{h}$ an und erhalten

$$(0 \neq)\ h(f_m)^d\cdot h(g_0) = \widetilde{h}(q)\cdot \widetilde{h}(f) + \widetilde{h}(r).$$

Auf der linken Seite steht eine Konstante aus K-{0}. Der erste Summand rechts ist 0 oder ein Polynom vom Grade $\geq \deg(f) = m$ und der zweite Summand rechts hat einen Grad < m. Wäre der erste Summand rechts ungleich Null, so würde rechts ein Polynom vom Grad $\geq$ m stehen, was nicht möglich ist angesichts der linken Seite. Deshalb ist der erste Summand rechts gleich Null (d.h. $\widetilde{h}(q) = 0$) und $\widetilde{h}(r)$ ist eine von 0 verschiedene Konstante von K. Wir können also g durch r ersetzen und auf diese Weiser erreichten, daß

$$n = \deg(g) < m = \deg(f)$$

gilt. Wir führen dies durch Induktion nach m zum Widerspruch.
<u>Induktionsanfang</u>: m = 1.

In diesem Fall wäre g vom Grad 0 und $0 \neq g_0 = g \in I$, was im Widerspruch zu (1) steht.
Induktionsschritt. $m > 1$.
Jedem Polynom $p = p_0+...+p_s\cdot T^s \in A[T]$ mit $p_s \neq 0$ ordnen wir das Polynom

$$\hat{p}(T) := T^s\cdot p(T^{-1}) = p_s+...+p_0\cdot T^s \in A[T]$$

Wir betrachten das von den $\hat{p}$ mit $p\in I-\{0\}$ erzeugte Ideal

$$\hat{I} := (\hat{p} \mid p \in I - \{0\})\cdot A[T].$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es, die folgenden Aussagen zu beweisen.

1. $\hat{I} \cap A = J := \{ a \in A \mid a\cdot T \in I \}$
2. $h(J) = 0$, d.h. $h: A \longrightarrow K$ faktorisiert sich über A/J und induziert so einen Ring-Homomorphismus $\hat{h}: \hat{A} := A/J \longrightarrow K$, $a \bmod J \mapsto h(a)$.
3. $\hat{B} := A[T]/\hat{I}$ ist ein reduzierter Ring und $\hat{A}$ ein Teilring von $\hat{B}$ mit
$$\hat{B} = \hat{A}[\hat{b}].$$
4. $\hat{h}(J(\hat{I}) \bmod J) \neq 0$.
5. Die Restklasse von $\hat{g} = g_n + ... + g_0\cdot T^n$ in $\hat{A}[T]$ ist ein Polynom, dessen höchster Koeffizient bei $\hat{h}$ in ein von 0 verschiedenes Element und dessen übrige Koeffizienten in die 0 abgebildet werden,
$$\hat{h}(g_0 \bmod J) \neq 0 \text{ und } \hat{h}(g_i \bmod J) = 0 \text{ für } i > 0$$

Nach 1-4 genügen dann nämlich $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{h}$ den Vorausetzungen unseres Satzes, wobei nach 5 das Bild von $\hat{g}$ in $\hat{A}[T]$ and die Stelle des Polynoms f tritt. Wegen

$$\deg(\hat{g}) = n < m = \deg(f)$$

können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, nach welcher wegen $m > 1$ eine solche Situation nicht möglich ist. Auf Grund dieses Widerspruchs ist der hier betrachtete zweite Fall nicht möglich, d.h. es gilt die Behauptung.
Beweisen wir also die Aussagen 1 - 5.

Zu 1. Die Inklusion "$\supseteq$" folgt unmittelbar aus der Definition von $\hat{I}$. Wir haben die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$a \in \hat{I} \cap A.$$

Dann gibt es Polynome $u_i \in I$, $v_i \in A[T]$ mit

$$a = \sum_i T^{\deg u_i}\cdot u_i(T^{-1})\cdot v_i(T) \text{ in } A[T, T^{-1}] = \oplus_{-\infty}^{\infty} A\cdot T^\nu$$

Mit $d = \max \{\deg u_i + \deg v_i\}$ folgt

$$a = T^d \sum_i T^{-d+\deg u_i} \cdot u_i(T^{-1}) \cdot v_i(T).$$

Wir ersetzen T durch T^{-1} und erhalten

$$a = T^{-d} \sum_i T^{d-\deg u_i} \cdot u_i(T) \cdot v_i(T^{-1}),$$

also

$$a \cdot T^d = \sum_i u_i(T) \cdot T^{d-\deg u_i} \cdot v_i(T^{-1}) \in I$$

(wegen $u_i \in I$). Es folgt $(a \cdot T)^d \in I$. Weil $B = A[T]/I$ reduziert ist, ist I ein radikales Ideal, d.h. es gilt $a \cdot T \in I$, also $a \in J$. Damit ist auch die umgekehrte Inklusion bewiesen, und es gilt Aussage 1.

<u>Zu 2</u>. Wäre $h(J) \neq 0$, so wäre $m = 1$ (wegen (1) und nach Wahl von f und m), im Widerspruch zur Induktionsannahme $m > 1$.

<u>Zu 3</u>. Auf Grund der Definition $\hat{B} := A[T]/\hat{I}$ ist $\hat{B}$ einfach erzeugt über A, also auch über $A/\hat{I} \cap A = A/J$, und damit von der Gestalt $\hat{B} = \hat{A}[\hat{b}]$ mit $\hat{b}$:= Restklasse von T. Wir haben noch zu zeigen, daß $\hat{B}$ reduziert ist. Dazu reicht es zu zeigen, das Ideal $\hat{I}$ ist radikal. Seien also t eine natürliche Zahl und $u \in A[T] - \{0\}$ ein Polynom mit

$$u^t \in \hat{I}.$$

Dann gibt es Polynome $u_i \in I$, $v_i \in A[T]$ mit

$$u^t = \sum_i T^{\deg u_i} \cdot u_i(T^{-1}) \cdot v_i(T) \text{ in } A[T, T^{-1}] = \oplus_{-\infty}^{\infty} A \cdot T^{\nu}$$

Mit $d = \max\{\deg u_i + \deg v_i\} + t \cdot \deg(u)$ folgt

$$u^t = T^d \sum_i T^{-d+\deg u_i} \cdot u_i(T^{-1}) \cdot v_i(T).$$

Wir ersetzen T durch T^{-1} und erhalten

$$u(T^{-1})^t = T^{-d} \sum_i T^{d-\deg u_i} \cdot u_i(T) \cdot v_i(T^{-1}),$$

also

$$(u(T^{-1}))^t \cdot T^d = \sum_i u_i(T) \cdot T^{d-\deg u_i} \cdot v_i(T^{-1}) \in I$$

also

$$(u(T^{-1}) \cdot T^{\deg(u)+1})^{t+d} \in I.$$

Nun ist $B = A[T]/I$ reduziert, d.h. I ist ein radikales Ideal. Deshalb folgt

$$\hat{u} \cdot T = u(T^{-1}) \cdot T^{\deg(u)+1} \in I,$$

also

$$\hat{I} \ni (\hat{u}\cdot T)^{\wedge} = T^{\deg(\hat{u})+1}(\hat{u}(T^{-1})\cdot T^{-1}) \quad \text{(nach Definition von } \hat{p})$$
$$= T^{\deg(\hat{u})}\cdot\hat{u}(T^{-1}). \quad \text{(Kürzen von T)}$$
$$= T^{\deg(\hat{u})}\cdot(T^{-1})^{\deg(u)}u(T). \quad \text{(nach Definition von } \hat{p})$$

Wegen $\deg(\hat{u}) \le$[75] $\deg(u)$ folgt $u \in \hat{I}$. Wir haben gezeigt, $\hat{I}$ ist tatsächlich ein radikales Ideal, d.h. $\hat{B}$ ist reduziert.

Zu 4 und 5. Wegen

$$g = g_0 + g_1\cdot T + ... + g_n\cdot T^n \in I \subseteq A[T]$$

gilt

$$\hat{g} = g_n + ... + g_0\cdot T^n \in \hat{I}.$$

Nach Definition von $\hat{h}$ und nach Wahl von g ist

$$\hat{h}(g_0 \bmod J) = h(g_0) \ne 0$$

$$\hat{h}(g_i \bmod J) = h(g_i) = 0 \text{ für jedes } i > 0.$$

Damit ist 5 bewiesen.

Wegen $g_0 \ne 0$ ist g_0 der höchste Koeffizient von $\hat{g} \in \hat{I}$, also $g_0 \in J(\hat{I})$. Wegen

$$\hat{h}(g_0 \bmod J) \ne 0$$

ist damit auch 4 bewiesen.

Wie bereits erwählt gilt mit 1-5 auch die Behauptung.

QED.

1.9.4 Fortsetzbarkeit auf endlich erzeugte Algebren

Seien B ein Integritätsbereich und $A \subseteq B$ ein Teilring, über welchem B endlich erzeugt ist. Für jedes $b \in B-\{0\}$ gibt es dann ein $a \in A-\{0\}$ derart, daß für jeden Ring-Homomorphismus

$$\phi: A \longrightarrow K$$

mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper K mit

$$\phi(a) \ne 0$$

eine Fortsetzung von ϕ existiert zu einem Ring-Homomorphismus

$$\tilde{\phi}: B \longrightarrow K \text{ mit } \tilde{\phi}(b) \ne 0.$$

Beweis. Nach Vorausetzung hat B die Gestalt

$$B = A[b_1,...,b_n].$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: n = 1.

Wir schreiben

$$B = A[b_1] = A[T]/I$$

[75] Die Ungleichung ist echt, wenn das Absolutglied von u gleich 0 ist.

mit einem Ideal $I \subseteq A[T]$.
1. Fall: $I = 0$.
Sei
$$0 \neq b = a_0 + a_1 \cdot T + ... + a_s \cdot T^s \in A[T] = B.$$
Dabei sei s so gewählt, daß a_s von Null verschieden ist. Wir setzen
$$a := a_s .$$
Sei $\phi: A \longrightarrow K$ ein Ring-Homomorphismus mit $\varphi(a) \neq 0$. Wir haben zu zeigen, φ läßt sich fortsetzen zu einem Ring-Homomorphismus auf B, der an der Stelle b ungleich 0 ist.
Nach Wahl von φ ist
$$\phi(a_0) + \phi(a_1) \cdot T + ... + \phi(a_s) \cdot T^s \in K[T]$$
ein von Null verschiedenes Polynom über dem algebraisch abgeschlossenen (und damit unendlichen) Körper. Wir wählen ein Element $c \in K$, welches von den endlich vielen Nullstellen dieses Polynoms verschieden ist.

Der Ring-Homomorphismus
$$\tilde{\phi}: B = A[T] \longrightarrow K, \sum_j x_j \cdot T^j \mapsto \sum_j \phi(x_j) \cdot c^j,$$
setzt ϕ fort und hat an der Stelle b den von Null verschiedenen Wert
$$\tilde{\phi}(b) = \phi(a_0) + \phi(a_1) \cdot c + ... + \phi(a_s) \cdot c^s$$
2. Fall: $I \neq 0$.
Sei
$$f \in I - \{0\}$$
ein Element minimalen Grades. Wir bezeichnen mit
$$a_1 \in A - \{0\}$$
den höchsten Koeffizienten von f.
Behauptung 1. f ist irreduzibel als Element von $\mathbf{Q}(A)[T]$.
Angenommen, f ist reduzibel, sagen wir
$$f = f' \cdot f''$$
mit zwei Polynomen $f', f'' \in \mathbf{Q}(A)[T]$, deren Grad kleiner ist als der von f. Durch Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten $c \in A - \{0\}$ erreichen wir, daß die Koeffizienten der Polynome sogar in A liegen, d.h.
$$c \cdot f = f' \cdot f'' \text{ mit } f', f'' \in A[T] \text{ und } \deg f' < \deg f, \deg f'' < \deg f.$$
Damit gilt $f' \cdot f'' = c \cdot f \in I$. Weil $B = A[T]/I$ ein Integritätsbereich ist, ist I ein Primideal. Es folgt
$$f' \in I \text{ oder } f'' \in I.$$
Das steht aber im Widerspruch dazu, daß f ein Polynom kleinsten Grades in $I - \{0\}$ sein soll. Dieser Widerspruch zeigt, f ist irreduzibel über $\mathbf{Q}(A)$, d.h. des gilt Behauptung 1.

Behauptung 2: Ein Element $g \in A[T]$ liegt genau dann in $I \cdot A_{a_1}[T]$, wenn es eine natürliche Zahl d gibt mit
$$a_1^d g \in f \cdot A[T].$$

Division von g durch f mit Rest führt zu einer Relation der Gerstalt

$$a_1^d g = q\cdot f + r \text{ mit } q, r \in A[T] \text{ mit } \deg r < \deg f.$$

Liegt g in $I\cdot A_{a_1}[T]$, so gibt es eine natürliche Zahl d derart, daß $a_1^d g$ in I liegt. Wegen f $\in$ I liegt dann aber auch

$$r = a_1^d g - g\cdot f$$

in I. Wegen deg r < deg f muß dann auf Grund der Minimalität des Grades von f das Polynom r gleich Null sein, d.h. $a_1^d g$ ist ein Vielfaches von f wie behauptet.

Sei umgekehrt $a_1^d g(T) = f(T)\cdot h(T)$ ein Vielfaches von f. Wir setzen für T die Nullstelle b_1 von f ein und erhalten $a_1^d g(b_1) = 0$, also $a_1^d g \in I$, also $g \in I\cdot A_{a_1}[T]$. Damit ist Behauptung 2 bewiesen.

Sei $h \in A[T]$ ein Repräsentant von $b \in B = A[b_1] = A[T]/I$. Wegen $b \neq 0$ liegt h nicht in I und ist insbesondere kein Vielfaches von f. Deshalb sind f und h teilerfremd in $\mathbf{Q}(A)[T]$. Es gilt

$$u\cdot f + v\cdot h = a_2 \text{ in } A[T] \text{ mit } u, v \in A[T] \text{ und } a_2 \in A - \{0\}.$$

Wir setzen

$$a := a_1\cdot a_2 \in A - \{0\}.$$

Sei $\phi\colon A \longrightarrow K$ ein Ring-Homomorphismus mit Werten in einem algebraisch abgeschlossenen Körper K und mit $\phi(a) \neq 0$. Wir haben zu zeigen, ϕ besitzt eine Fortsetzung auf B, welche an der Stelle b ungleich 0 ist.

Wegen $0 \neq \phi(a) = \phi(a_1)\cdot\phi(a_2)$ bildet ϕ den höchsten Koeffizienten a_1 von $f \in I-\{0\}$ in ein von 0 verschiedenes Element von K ab. Nach 1.9.3 besitzt ϕ eine Fortsetzung zu einen Ring-Homomorphismus

$$\tilde{\phi}\colon B \longrightarrow K.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
0 \neq \phi(a_2) &= \tilde{\phi}(a_2) && (\tilde{\phi} \text{ setzt } \phi \text{ fort})\\
&= \tilde{\phi}(u\cdot f + v\cdot h \bmod I) && (\text{wegen } B = A[T]/))\\
&= \tilde{\phi}(v\cdot h \bmod I) && (\text{wegen } f \in I)\\
&= \tilde{\phi}(v \bmod I)\cdot \tilde{\phi}(h \bmod I) && (\tilde{\phi} \text{ ist Ring-Honomorphismus})\\
&= \tilde{\phi}(v \bmod I)\cdot \tilde{\phi}(b) && (\text{nach Wahl von h})
\end{aligned}$$

gilt auch

$$\tilde{\phi}(b) \neq 0.$$

<u>Induktionsschluß</u>. n > 1.

Mit A' := A[b_n] gilt

$$B = A'[b_1,...,b_{n-1}].$$

Für das vorgegebene Element $b \in B$ gibt es deshalb nach Induktionsvoraussetzung ein $a' \in A'$, sodaß jeder Homomorphismus ϕ': A' $\longrightarrow$ K mit $\phi'(a') \neq 0$ eine Fortsetung

$$\tilde{\phi}: B \longrightarrow K \text{ mit } \tilde{\phi}(b) = 0$$

besitzt. Auf Grund des Induktionsanfangs gibt es zu $a' \in A'$ ein $a \in A$ derart, das jeder Homomorphismus

$$\phi: A \longrightarrow K \text{ mit } \phi(a) \neq 0$$

eine Fortsetzung

$$\phi': A' \longrightarrow K \text{ mit } \phi'(a') \neq 0$$

besitzt. Wie gerade gesehen, besitzt diese aber eine Fortsetzung

$$\tilde{\phi}: B \longrightarrow K \text{ mit } \tilde{\phi}(b) = 0.$$

QED.

1.9.5 Eine Eigenschaft des Bildes eines Morphismus von Varietäten

Sei ϕ: X $\longrightarrow$ Y ein Morphismus von Varietäten. Dann enthält $\phi(X)$ eine nicht-leere offene Teilmenge der Abschließung $\overline{\phi(X)}$.

Beweis. 1. Schritt. Reduktion auf den Fall Y affin.
Als Varietät besitzt Y eine Überdeckung durch affine offene Teilmengen, sagen wir

$$Y = \bigcup_{i\in I} V_i \text{ mit } V_i \text{ affine offene Teilmenge von } Y.$$

Wir setzen $U_i := \phi^{-1}(V_i)$ und

$$\phi_i := \phi|_{U_i} : U_i \longrightarrow V_i .$$

Das Bild von ϕ und dessen Abschließung besitzen die offenen Überdeckungen

$$\phi(X) = \bigcup_{i\in I} \phi(X)\cap V_i \text{ und } \overline{\phi(X)} = \bigcup_{i\in I} \overline{\phi(X)}\cap V_i$$

mit

$$\begin{aligned}\phi(X)\cap V_i &= \phi(\phi^{-1}(V_i)) \\ &= \phi(U_i)\end{aligned}$$

Dabei ist $\overline{\phi(X)}\cap V_i$ die Abschließung von $\phi(X)\cap V_i$ (= $\phi(U_i)$) in V_i.
Falls die Behauptung in Fall Y affin gilt, gibt es für jedes i eine offene Teilmenge

$$W_i = \text{offen in } \overline{\phi(X)}\cap V_i \text{ mit } W_i \subseteq \phi(U_i)$$

Da die $\overline{\phi(X)}\cap V_i$ offen sind in $\overline{\phi(X)}$, ist jedes W_i offen in $\overline{\phi(X)}$. Damit ist

$$\bigcup_{i\in I} W_i \;(\subseteq \bigcup_{i\in I} \phi(U_i) = \phi(X))$$

offen in $\overline{\phi(X)}$. Die Behauptung gilt also im allgemeinen Fall, wenn sie im Fall Y affin gilt.
2. Schritt. Reduktion auf den Fall Y affin und irreduzibel und gleich $\overline{\phi(X)}$.

Auf Grund des ersten Schritts können wir annehmen, Y ist affin. Wir haben zu zeigen, $\phi(X)$ enthält eine offene Teilmenge von $\overline{\phi(X)}$. Als abgeschlossene Teilmenge der affinen Menge Y ist $\overline{\phi(X)}$ selbst affin. Wir können deshalb annehmen,

$$Y = \overline{\phi(X)}.$$

Sei

$$Y = Y_1 \cup ... \cup Y_s \tag{1}$$

die (unverkürzbare) Zerlegung in irreduzible Komponten von Y. Dann gilt

$$\phi(X) = (Y_1 \cap \phi(X)) \cup ... \cup (Y_s \cap \phi(X)) \tag{2}$$

mit

$$Y_i \cap \phi(X) = \phi(\phi^{-1}(Y_i)) \subseteq Y_i$$

Ist für ein i die Abschließung von $Y_i \cap \phi(X)$ echt in Y_i enthalten, so können wir aus (2) durch Übergang zu den Abschließungen eine zweite Zerlegung wie in (1) erhalten, wobei anstelle von Y_i für mindestens ein i eine echt kleinere abgeschlossene Teilmenge von Y_i stehen würde. Das widerspricht der Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Komponenten. Es gilt also

$$\overline{\phi(\phi^{-1}(Y_i))} = \overline{Y_i \cap \phi(X)} = Y_i \text{ für jedes i.}$$

Falls die Behauptung im Fall Y affin und irreduzibel gilt, so können wir diese auf den Morphismus $\phi^{-1}(Y_i) \longrightarrow Y_i$ anwenden und sehen, es gibt eine nicht-leere offene Teilmenge W_i von Y_i mit

$$W_i \subseteq \phi(\phi^{-1}(Y_i)).$$

Weil Y_i irreduzibel ist, können wir W_i mit der nicht-leeren offenen Teilmenge

$$Y - (Y_1 \cup ... \cup Y_{i-1} \cup Y_{i+1} \cup ... \cup Y_s) \tag{3}$$

von Y_i schneiden und erhalten wieder eine nicht-leere offene Teilmenge von Y_i. Wir können die Menge W_i soweit verkleinern, daß sie ganz in der offenen Menge (3) liegt, die sowohl offen in Y_i als auch in Y ist. Damit ist W_i ebenfalls offen in Y. Die Vereinigung

$$\cup_{i=1}^{s} W_i$$

ist eine offene Teilmenge von Y, welche ganz in

$$\cup_{i=1}^{s} \phi(\phi^{-1}(Y_i)) = \cup_{i=1}^{s} Y_i \cap \phi(X) = \phi(X)$$

liegt. Wir haben gezeigt, die Behauptung gilt im allgemeinen Fall, falls sie im Fall Y affin und irreduzibel gilt.

3. Schritt. Reduktion auf den Fall X und Y affin und Y irreduzibel und gleich $\overline{\phi(X)}$.

Auf Grund des zweiten Schritts können wir annehmen, Y ist affin und irreduzibel und gleich $\overline{\phi(X)}$.
Als Varietät besitzt X eine Überdeckung durch affine offene Teilmengen, sagen wir

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \text{ mit } U_i \text{ affine offene Teilmenge von } X.$$

Als Prävarietät ist X quasi-kompakt (vgl. 1.6.1). Deshalb können wir annehmen, daß die Überdeckung endlich ist,

$$I \text{ endlich.}$$

Es gilt

$$\phi(X) = \bigcup_{i\in I} \phi(X_i)$$

und

$$\overline{\phi(X)} = \overline{\bigcup_{i\in I}\phi(X_i)} \supseteq \overline{\phi(X_i)}$$

also

$$\overline{\phi(X)} = \overline{\bigcup_{i\in I}\phi(X_i)} \supseteq \bigcup_{i\in I} \overline{\phi(X_i)}$$

Weil I endlich ist, steht rechts anstelle der Inklusion sogar das Gleichheitszeichen,

$$\overline{\phi(X)} = \overline{\bigcup_{i\in I}\phi(X_i)} = \bigcup_{i\in I} \overline{\phi(X_i)}$$

Weil $\overline{\phi(X)} = Y$ irreduzibel ist, gibt es ein i mit

$$Y = \overline{\phi(X)} = \overline{\phi(X_i)}.$$

Falls die Behauptung im Fall X und Y affin und Y irreduzibel und gleich $\overline{\phi(X)}$ gilt, so können wir diese auf den Morphismus

$$X_i \longrightarrow Y$$

anwenden und sehen, es gibt eine offene Teilmenge W von Y, welche ganz in

$$\phi(X_i) \subseteq \phi(X)$$

liegt.

Wir haben gezeigt, die Behauptung gilt im allgemeinen Fall, wenn sie im Fall X und Y affin und Y irreduzibel und gleich $\overline{\phi(X)}$ gilt.

4. Schritt. Reduktion auf den Fall X und Y beide affin und irreduzibel sind und $Y=\overline{\phi(X)}$ gilt.

Auf Grund des dritten Schritts können wir annehmen, X und Y affin sind und Y irreduzibel und gleich $\overline{\phi(X)}$ ist.

Sei

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$$

die (unverkürzbare) Zerlegung in irreduzibel Komponenten. Dann gilt

$$\phi(X) \quad = \phi(X_1) \cup \ldots \cup \phi(X_r),$$

also

$$Y = \overline{\phi(X)} = \overline{\phi(X_1)} \cup \ldots \cup \overline{\phi(X_r)}.$$

Weil Y irreduzibel ist, gibt es ein i mit

$$Y = \overline{\phi(X_i)}.$$

Falls die Behauptung im Fall, daß X und Y beide affin und irreduzibel sind und Y gleich $\overline{\phi(X)}$ gilt, so können wir diese auf die Einschränkung

$$X_i \longrightarrow Y$$

von ϕ anwenden und sehen, daß Y eine offene Menge W enthält mit $W \subseteq \overline{\phi(X_i)}$.

Die Behauptung gilt also im allgemenen Fall, wenn sie im Fall gilt, daß X und Y beide affine und irreduzibel sind und $Y = \overline{\phi(X)}$ ist.

5. Schritt. Beweis im Fall, daß X und Y beide affin und irreduzibel sind und $Y=\overline{\phi(X)}$.

Wir betrachten den durch ϕ induzierten k-Algebra-Homomorphismus

$$\phi^*: k[Y] \longrightarrow k[X].$$

Weil X und Y irreduzibel sind, sind k[X] und k[Y] Integritätsbereiche. Wegen $Y= \overline{\phi(X)}$ ist ϕ^* injektiv (vgl. 1.9.1 (ii)). Wir können also k[Y] als Teilring von k[X] betrachten. All Koordinatenring ist k[X] endlich erzeugt über k, also auch über k[Y]. Wir wenden 1.9.4 mit A := k[Y] und B := k[X] und das Element $b = 1 \in B$. Wir sehen so, es ein Element von Null verschiedenes Element $a \in A = k[Y]$ gibt mit der Eigenschaft, daß jeder Homomorphismus von k-Algebren

$$h: k[Y] \longrightarrow k \text{ mit } h(a) \neq 0$$

eine Fortsetzung

$$\tilde{h}: k[X] \longrightarrow k$$

besitzt.

Für jeden Punkt $y \in D(a) \subseteq Y$ ist k-Algebra-Homomorphismus

$$k[Y] \longrightarrow k,\ f \mapsto f(y),$$

ein k-Algebra Homomorphismus, der das Element $a \in k[Y]$ in eine von 0 verschieden Konstante von k abbildet. Seine Fortsetzung

$$k[X] \longrightarrow k$$

hat einen Kern M_x mit

$$M_x \cap k[Y] = M_y\ ,$$

d.h. es gilt

$$(\phi*)^{-1}(M_x) = M_y\ ,$$

d.h.

$$((\phi*))^{\#}(x) = y$$

(vgl. den Beweis von Bemerkung 1.4.7 (iii)). Nach Bemerkung 1.4.7 (vi)) gilt $((\phi*))^{\#} = \phi$. Wir haben gezeigt, für jeden Punkt $y \in D(a) \subseteq Y$ gibt es einen Punkt $x \in X$ mit $\phi(x) = y$, d.h. die offene Hauptmenge D(a) von $Y = \overline{\phi(X)}$ liegt im Bild von ϕ,

$$D(a) \subseteq \phi(X).$$

QED.

1.9.6 Aufgaben

Aufgabe 1

Sei X eine Varietät. Eine Teilmenge von X heißt lokal abgeschlossen, wenn sie Durchschnitt einer offenen Teilmenge mit einer abgeschlossenen ist. Sie heißt konstruktiv, wenn sie Vereinigung von endlich vielen loakal abgeschlossenen Teilmengen ist. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Seien Z, Z' zwei konstruktive Teilmengen von X. Dann sind auch

$$Z \cup Z',\ Z \cap Z',\ Z\text{-}Z'$$

konstruktiv.

(ii) Sei $F \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X und $Z \subseteq F$ eine als Teilmenge von F konstruktive Menge. Dann ist Z auch als Teilmenge von X konstruktiv.

(iii) Das Bild eines Morphismus $\phi: X \longrightarrow Y$ ist eine konstruktive Teilmenge von Y (Hinweis: man beweise die Aussage durch Induktion nach dim X und verwende 1.8.2).

(iv) Das Bild einer konstruktiven Teilmenge bei einem Morphismus ist konstruktiv.

Beweis. Zu (i). Eine Vereinigung von zwei endlichen Vereinigungen ist eine endliche Vereinigung. Deshalb ist mit Z und Z' auch $Z \cup Z'$ konstruktiv.

Bezeichne

$$\mathbf{C}(M) := X - M$$

das Komplement einer Teilmenge M von X in X. Dann gilt

$$\begin{aligned} U \cap F - U' \cap F' &= U \cap F \cap C(U' \cap F') \\ &= U \cap F \cap (C(U') \cup C(F')) \\ &= U \cap F \cap C(U') \cup U \cap F \cap C(F') \\ &= U \cap (F \cap C(U')) \cup (U \cap C(F')) \cap F \end{aligned}$$

Sind U,U' offen und F, F' abgeschlossen in X, so beschreibt der letzte Ausdruck eine Vereinigung von zwei konstruktiven Mengen, also eine konstruktive Menge. Damit ist auch die Differenz Z-Z' zweier konstruktiver Mengen Z,Z' konstruktiv.

Speziell für Z = X sehen wir, das Komplement einer konstruktiven Menge ist konstruktiv.

Dann ist aber auch

$$Z \cap Z' = C(C(Z) \cap C(Z'))$$

konstruktiv.

Zu (ii). Nach Voraussetzung hat Z die Gestalt

$$Z = (F_1 \cap V_1) \cup \ldots \cup (F_n \cap V_n)$$

mit abgeschlossenen Teilmengen F_i von F und in F offenen Teilmengen V_i. Nach Definition der Unterraum-Topologie haben die V_i die Gestalt

$$V_i = U_i \cap F \text{ mit } U_i \text{ offen in X.}$$

Damit gilt für jedes i,

$$\begin{aligned} F_i \cap V_i &= F_i \cap U_i \cap F \\ &= F_i \cap U_i \qquad \text{(wegen } F_i \subseteq F) \end{aligned}$$

d.h. die Mengen $F_i \cap V_i$ sind lokal abgeschlossen in X und deren Vereinigung damit konstruktiv.

Zu (iii). 1. Schritt. Reduktion auf den Fall Y irreduzibel.

Sei

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$$

die Zerlegung von Y in irreduzible Komponenten (vgl. 1.6.2 (1) und 1.2.4).

Falls die Behauptung im Fall Y irreduzibel gilt, so können wir die Aussage auf die Einschränkung

$$\phi_i : X_i \longrightarrow Y_i$$

von ϕ auf die abgechlossene Teilvarietät $X_i := \phi^{-1}(Y_i)$ anwenden. Das Bild von ϕ_i,

$$\phi_i(X_i) = \phi(X_i)$$

ist dann eine konstruktive Teilmenge von Y_i und damit nach (ii) auch von Y. Dann ist aber

$$\phi(X) = \bigcup_{i=1}^{n} \phi_i(X_i)$$

eine konstruktive Teilmenge von Y (nach (i)). Wir haben gezeigt, gilt die Behauptung im Fall Y irreduzibel, so gilt sie allgemein.

2. Schritt. Reduktion auf den Fall $Y = \overline{\phi(X)}$.

Wir betrachten ϕ als Abbildung

$$\phi: X \longrightarrow \overline{\phi(X)}$$

mit Werten in der abgeschlossenen Teilvarietät $\overline{\phi(X)}$. Falls die Behauptung in dieser Situation gilt, ist $\phi(X)$ eine konstruktive Teilmenge von $\overline{\phi(X)}$. Nach (ii) ist $\phi(X)$ dann aber auch kontruktiv als Teilmenge von Y.

Wir haben gezeigt, gilt die Behauptung im Spezialfall $Y = \overline{\phi(X)}$, so gilt sie allgemein.

3. Schritt. Abschluß des Beweises.

Wir führen den weiteren Beweis durch Induktion nach der Dimension von Y.

Induktionsanfang. dim Y = 0.

Nach den ersten beiden Schritten können wir annehmen, Y ist irreduzibel. Für jede (nicht-leere) affine offene Teilmenge U von Y gilt dann

$$0 = \dim Y = \text{tr. deg}_k\, k(Y) = \text{tr. deg}_k\, k(U),$$

d.h. k(U) ist ein algebraische Körpererweiterung von k. Weil k algebraisch abgeschlossen ist, folgt k(U) = k, also

$$k \subseteq k[U] \subseteq k(U) = k$$

also k[U] = k. Damit hat k[U] nur ein maximales Ideal, d.h. U besteht aus nur einem Punkt. Wir haben gezeigt, jede affine offene Teilmenge von U besteht aus nur einem Punkt. Da jeder Punkt eine affine offene Umgebung besitzt, ist damit jede einpunktige Menge von Y offen. Insbesondere ist $\phi(X)$ offen in Y, also auch konstruktiv.

Bemerkkung.

Die Topologie von Y ist die diskrete Topologie. Eine Teilmenge, die aus mehr als einen Punkt besteht ist dann aber reduzibel, d.h. Y besteht aus nur einem Punkt.

Induktionsschritt. dim Y > 0.

Nach dem ersten Schritt können wir annehmen, Y ist irreduzibel, und nach dem zweiten zusätzlich, daß gilt

$$Y = \overline{\phi(X)}.$$

Nach 1.9.5 gibt es eine nicht-leere offene Teilmeng $U \subseteq Y$ mit $U \subseteq \phi(X)$. Es folgt

$$\phi(X) = U \cup (\phi(X) - U).$$

Als offen Menge ist U konstruktiv. Nach (i) reicht es zu zeigen, daß die Menge

$$\phi(X) - U \quad = \phi(X - \phi^{-1}(U))$$

konstruktiv ist als Teilmenge von Y.

Weil U offen ist in Y ist $\overline{\phi(X)} - U$ abgeschlossen in Y. Mit $\phi(X) - U \subseteq \overline{\phi(X)} - U$ gilt deshalb auch

$$\overline{\phi(X)-U} \subseteq \overline{\phi(X)} - U$$

Weil U eine nicht-leere offene Teilmenge von $\phi(X)$ (also auch von $\overline{\phi(X)}$) ist, muß

$$\overline{\phi(X)-U} \text{ echte abgeschlossene Teilmenge von } \overline{\phi(X)} = Y$$

sein. Weil Y irreduzibel ist, hat damit jede irreduzible Komponente von $\overline{\phi(X)-U}$ eine echt kleinere Dimension als Y (nach 1.8.2),

$$\dim Z < \dim Y \text{ für jede irreduzible Komponente von } \overline{\phi(X)-U}$$

Dann gilt aber auch

$$\dim \overline{\phi(X)-U} < \dim Y$$

(vgl. 1.8.1.3). Wir können deshalb die Induktionsvoraussetzung auf die Einschränkung

$$\phi': X - \phi^{-1}(U) \longrightarrow \overline{\phi(X)-U}$$

von ϕ auf die abgeschlossene Teilvarietät $X - \phi^{-1}(U)$ anwenden. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\phi'(X - \phi^{-1}(U)) = \phi(X - \phi^{-1}(U)) = \phi(X) - U$$

eine konstruktive Teilmenge von $\overline{\phi(X)-U}$ und nach (ii) damit auch eine konstruktive Teilmenge von Y.

Zusammen erhalten wir, $\phi(X) = U \bigcup (\phi(X) - U)$ ist konstruktiv in Y.

Zu (iv). Seien $\phi: X \longrightarrow Y$ ein Morphismus und Z eine konstruktive Teilmenge von X, d.h.

$$Z = (F_1 \bigcap U_1) \bigcup \ldots \bigcup (F_n \bigcap U_n)$$

mit U_i offen in X und F_i abgeschlossen in X. Dann gilt

$$\phi(Z) \quad = \phi(F_1 \bigcap U_1) \bigcup \ldots \bigcup \phi(F_n \bigcap U_n).$$

Nach (i) reicht es zuzeigen, daß $\phi(U_i \bigcap F_i)$ konstruktiv ist in Y. Diese Menge ist aber gerade das Bild der Zusammensetzung

$$U_i \bigcap F_i \hookrightarrow U_i \hookrightarrow X \xrightarrow{\phi} Y$$

von ϕ mit der natürlichen Einbettung der offenen Teilvarietät U_i von X mit der natürlichen Einbettung der abgeschlossenen Teilvarietät $U_i \bigcap F_i$ von U_i. Nach (iii) ist dieses Bild konstruktiv.

QED.

Aufgabe 2

(i) Seien F ein Körper und E eine Körpererweiterung von F, welcher als F-Algebra endlich erzeugt ist. Dann ist E eine endliche algebraische Erweiterung von F (Hinweis: man verwende 1.9.4).

(ii) Seien F ein Körper und M ein maximales Ideal des Polynomrings

$$S = F[T_1,...,T_n].$$

Dann ist S/M eine endliche algebraische Erweiterung von F.

(iii) Sei I ein Ideal von S. Dann ist das Radikal $\sqrt{I}$ gleich dem Durchschnitt der maximalen Ideale von S, welche das Ideal I enthalten (Hinweis: Sei f ein von 0 verschiedenes Element in diesem Durchschnitt und sei $\overline{f}$ die Restklasse von f in S/I. Zeigen Sie $(S/I)_{\overline{f}} = 0$).

(iv) Beweisen Sie den Nullstellensatz 1.1.2 (man beachte, der Beweis von 1.9.4 verwendet keine Ergebnisse der vorangehenden Abschnitte).

Beweis. Zu (i). Wir wenden 1.9.4 an mit A = F, B = E, b = 1 und ϕ die natürliche Einbettung

$$\phi: F \hookrightarrow K$$

in die algebraische Abschließung K von F. Wegen $\phi(b) \neq 0$ gibt es dann eine Fortsetzung

$$\tilde{\phi}: E \longrightarrow K$$

von ϕ auf B. Weil E in Körper ist, muß der Kern von $\widetilde{\phi}$ trivial sein, d.h. $\widetilde{\phi}$ ist injektiv. Wir können E mit einem Teilkörper von K identifizieren. Weil jedes Element von K algebaisch ist über F, gilt dasselbe auch für die Elemente von E. Als endlich erzeugte algebraischse Erweiterung von F ist E sogar endlich über F.

<u>Zu (ii)</u>. Als Algebra über F ist

$$S/M = F[T_1,...,T_n]/M$$

endlich erzeugt. Weil M ein maximales Ideal ist, ist S/M ein Körper. Nach (i) ist S/M eine endliche algebraische Erweiterung.

<u>Zu (iii)</u>. Sei

$$J := \bigcap \{p \in \mathrm{Specm}(S) \mid I \subseteq p \}.$$

der Durchschnitt aller maximalen Ideale, welche das Ideal I vollstängig enthalten. Wir haben zu zeigen

$$\sqrt{I} = J.$$

<u>Beweis von</u> "$\subseteq$".

Sei $f \in \sqrt{I}$. Dann gibt es eine natürliche Zahl s mit $f^s \in I$. Für jedes Primoberideal p von I gilt dann $f^s \in p$, also $f \in p$. Also liegt f im Durchschnitt dieser Primoberideale. Also erst recht im Durchschnitt der maximalen Ideale unter ihnen. Wir haben gezeigt, $\sqrt{I} \subseteq J$.

<u>Beweis von</u> "$\supseteq$".

Sei $f \in J$. Wir haben zu zeigen $f \in \sqrt{I}$. Dazu reicht es zu zeigen,

$$(S/I)_{\bar{f}} = 0 \tag{1}$$

ist der Null-Ring, denn dann gilt

$$\frac{1}{1} = \frac{0}{1} \text{ in } (S/I)_{\bar{f}} ,$$

d.h. es gibt eine natürliche Zahl i mit

$$0 = 0 = \bar{f}^i \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = \bar{f}^i,$$

d.h. $f^i \in I$, also $f \in \sqrt{I}$.

Beweisen wir also (1). Angenommen (1) ist falsch. Dann besitzt die F-Algbra

$$(S/I)_{\bar{f}}$$

ein maximales Ideal, sagen wir

$$\widetilde{m} \in \mathrm{Specm}\,(S/I)_{\bar{f}} .$$

Wir bezeichnen mit

$$\rho: S \longrightarrow S/I \text{ und } i: S/I \longrightarrow (S/I)_{\bar{f}}$$

die natürliche Abbildung auf den Faktorring bzw. die natürliche Abbildung in den Quotientenring. Weiter setzen wir

$$\bar{m} := i^{-1}(\widetilde{m}) \text{ und } m := \rho^{-1}(\bar{m}).$$

Dann induzieren ρ und i injektive F-Algebra-Homomorphismen

$$S/m \hookrightarrow (S/I)/\bar{m} \text{ und } (S/I)/\bar{m} \hookrightarrow (S/I)_{\bar{f}} / \widetilde{m} \tag{2}$$

Die Zusammensetzung surjektiver F-Algebra-Homomorphismen

$$F[T_1,...,T_{n+1}] \twoheadrightarrow (S/I)[T_{n+1}] \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} (S/I)_{\bar{f}} \twoheadrightarrow (S/I)_{\bar{f}} / \widetilde{m}$$

mit $\varphi(p(T_{n+1})) = p(1/f)$ induziert einen Isomorphismus

$$F[T_1,...,T_{n+1}]/M \xrightarrow{\cong} (S/I)_{\bar f} / \tilde m, \qquad (3)$$

wobei M den Kern dieser Surjektion bezeichne. Weil $\tilde m$ ein maximales Ideal ist, steht rechts ein Körper, also auch links, d.h. M ist ein maximales Ideal des Polynomrings über F in den Unbestimmten $T_1,...,T_{n+1}$. Nach (ii) steht rechts eine endliche algebraische Körpererweiterung von F (also insbesondere ein endlich-dimensionaler F-Vektorraum). Auf Grund der Injektionen (2) ist die F-Algbra S/m als F-Vektorraum auch endlich-dimensional und als Teilalgebra des Körpers (3) nullteilerfrei. Damit ist aber auch S/m ein Körper, also m ein maximales Ideal von S. Nach Konstruktion gilt

$I \subseteq m$,

Nun liegt f in jedem maximalen Ideal, welches I enthält:

$f \in m = \rho^{-1}(\bar m)$.

Es folgt

$\bar f = \rho(f) \in \bar m = i^{-1}(\tilde m)$

also

$i(\bar f) \in \tilde m \subseteq (S/I)_{\bar f}$.

Nun ist $i(\bar f)$ eine Einheit von $(S/I)_{\bar f}$, kann also unmöglich im maximalen Ideal $\tilde m$ liegen. Dieser Widerspruch zeigt, daß unser Annahme falsch ist und $(S/I)_{\bar f}$ der Nullring sein muß.

Zu (iv). Es reicht 1.1.2 (i) zu beweisen.

1. Schritt. Jedes maximale Ideal p von $S = k[T_1, ... , T_n]$ hat die Gestalt

$$p = (T_1 - c_1 , ... , T_n - c_n) \text{ mit } c_i \in k.$$

Für jedes maximale Ideal p von S ist nach (iii) die Faktoralgebra S/p eine endliche algebraische Erweiterung von k und - weil k algebraisch abgeschlossen ist - ist die natürliche Einbettung von k in den Faktorring S/p ein Isomorphismus,

$$k \xrightarrow{\cong} S/p , c \mapsto c \bmod p.$$

Insbesondere gibt es für jedes $T_i \in S$ ein $c_i \in k$ mit

$$T_i \bmod p = c_i \bmod p,$$

d.h. $T_i - c_i \in p$. Damit liegt das von $T_i - c_i$ erzeugte Idealganz in p. Weil die $T_i - c_i$ ein maximales Ideal erzeugen, folgt

$$p = (T_1 - c_1 , ... , T_n - c_n).$$

2. Schritt. Für jedes echte Ideal $I \subseteq k[T]$ gilt $V(I) \neq \emptyset$.

Ist I ein echtes Ideal, so gibt es ein maximales Ideal p von k[T] mit

$$I \subseteq p = (T_1 - c_1 , ... , T_n - c_n).$$

Die Elemente von I sind deshalb an der Stelle $(c_1 , ... , c_n)$ gleich Null, d.h. es gilt

$$(c_1 , ... , c_n) \in V(I).$$

Insbesondere ist V(I) nicht leer.

3. Schritt. Ist $V(I) \neq \emptyset$, so ist das Ideal I echt.

Das gilt trivialerweise, weil die konstante Funktion 1 an keiner Stelle den Wert 0 hat.

QED.

Bemerkung
Mit Hilfe von 1.9.4 läßt sich die Aussage von 1.8.2 ergänzen und erlaubt so eine Beschreibung der Dimension einer affinen Varietät mit Hilfe von Ketten von abgeschlossenen irreduziblen Teilvarietäten.

Anmerkungen zum ersten Kapitel

Das erste Kapitel enthält Standard-Material der algebraischen Geoemetrie und erfordert kaum einen Kommetar. Wir haben die Definition der algebraischen Varietäten über einem Grundkörper, der nicht algebraisch abgeschlossen ist, hinzugefügt sowie einige einfache Ergebnissen zu solchen Varietäten. Tieferliegende Ergebnissen dazu finden sich in Kapitel 11. In einer alternativen Terminologie sind unsere algebraischen Varietäten Schemata endlichen Typs über einem Körper, die absolut reduziert sind. Mehr zur algebraischen Geometrie findet man im Buch von Hartshorne [1] oder in den Notizen von Mumford [2].

In Abschnitt 1.4 haben wir nur Garben von Funktionen eingeführt. Allgemeinere Garben haben wir nicht diskutiert, da wir sie im folgenden nicht brauchen. Allgemeineres zur Garbentheorie kann man im Buch von Godement [1] finden.

In der Literatur wird 1.9.4 oft mit Hilfe von Bewertungen bewiesen. Wir haben eine elementare Herangehensweise gewählt, die zurückgeht auf Chevalley und Weil [3, p. 30-31]. Aussage 1.9.3 werden wir auch in 5.2 verwenden.

Index

—G—

—H—

—I—

—K—

—L—

—M—

—N—

Inhalt